بسمه تعالی

پردازش تصویر پزشکی

(MEDICAL IMAGE PROCESSING)

احسان سعادت نیا

گروه: مهندسی پزشکی

استاد راهنما: مهندس باغبانی

*معرفی موضوعات:

❖ مقدمه

- ☑ سیستم‌های تصویربرداری کامپیوتری
- ☑ روش نمایش تصویر
- ☑ کیفیت تصویر پزشکی
- ☑ تبدیل فوریه گسسته جهت پردازش تصویر
- ☑ خواص DFT
- ☑ تکنیک‌های دستکاری سطح خاکستری
- ☑ تکنیک‌های پنجره
- ☑ تکنیک‌های تغییر هیستوگرام
- ☑ تکنیک‌های دستکاری کردن ماتریس تصویر در حوزهٔ زمان
- ☑ هموارسازی تصویر
- ☑ تیز کردن تصویر
- ☑ بالا بردن کیفیت تصویر در حوزهٔ فرکانس
- ☑ فیلترهای باترورث
- ☑ فیلترهای نمایی
- ☑ بالا بردن کیفیت تصاویر در حوزهٔ زمان در مقابل حوزهٔ فرکانس

❖ ترمیم تصویر

- ☑ فیلتر واینر
- ☑ همسان سازی طیف انرژی
- ☑ فیلترهای واینر کلی

❖ الگوریتم بازسازی تموگرافی تصویر

- ☑ الگوریتم بازسازی فوریه
- ☑ الگوریتم کانولوشن

❖ مراجع

* مقدمه

سیستم تصویربرداری کامپیوتری:

شکل (۱) بلوک دیاگرام اجزاء اصلی یک سیستم تصویربرداری را که عملکرد آن به وسیله کامپیوترهای مخصوصی کنترل می‌شود نشان می‌دهد، عملکرد چنین سیستمی درون ۴ دستهٔ اصلی تقسیم می‌شود:

جمع‌آوری، دیجیتالی کردن، پردازش و نمایش

در مرحلهٔ اول نیاز است تا به وسیلهٔ ابزارهایی اطلاعات جمع‌آوری شود از جمله این ابزارها می‌توان به گانتری در دستگاه CT یا (MRI)، پروب اولتراسوند و تشدید کننده تصویر D.S.A که به مهمترین سیستم‌های تصویربرداری کامپیوتری مربوط می‌شوند اشاره کرد.

در واقع این‌ها مبدل‌هایی هستند که نوع‌های مختلفی از تابش را به جریان‌های الکتریکی متناظر جهت ورود به کامپیوتر میزبان تبدیل می‌کنند.

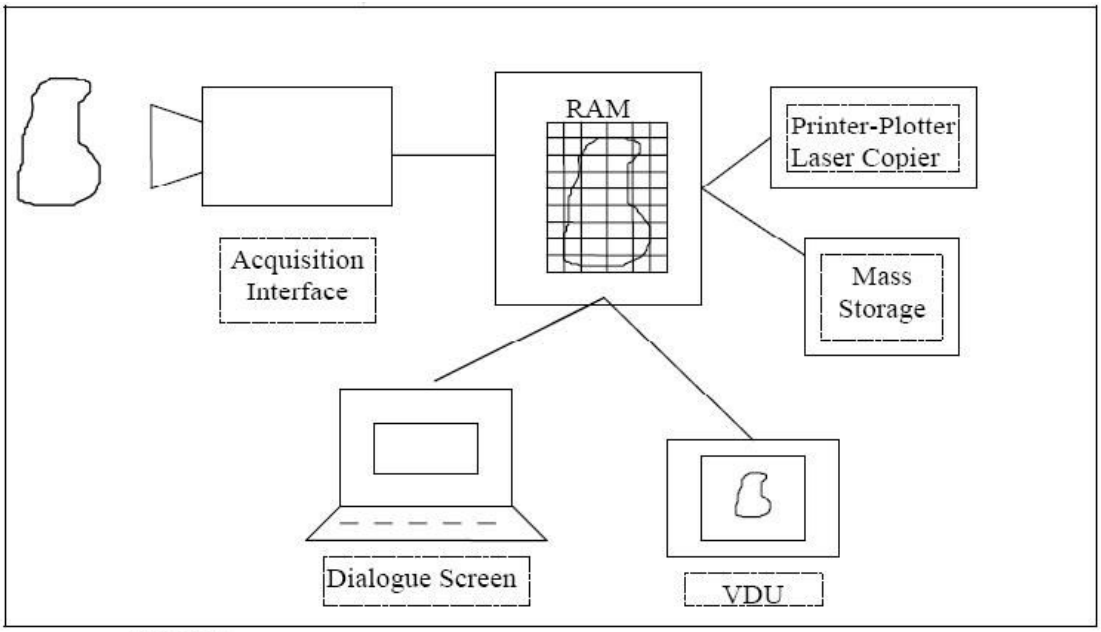


Figure 1

عملکرد دوم، روش دیجیتالی کردن است، این روش که در اثر تبدیلات سیگنال آنالوگ به فرم دیجیتالی است برای ورود به سیستم کامپیوتر مناسب می باشد.

این عمل بوسیلهٔ مبدل آنالوگ به دیجیتال (ADC) که بخشی از واسط است و دستگاه جمع‌کننده را به کامپیوتر میزبان متصل می‌کند، اجرا می‌شود. کیفیت تصاویر بخش جمع کننده اطلاعات و بخش واسط علی رغم تفاوت میان آنها در یک هدف مشترک هستند که آن تبدیل تابش دریافت شده از بدن بیمار به یک سیگنال دیجیتالی دوبعدی است که در اصطلاح آنرا تصویر دیجیتالی می نامند و در حافظهٔ کامپیوتر ذخیره می‌گردد.

یکی از بخش‌های اصلی تصویر دیجیتالی، عمل پردازش داده‌ها است که در دستهٔ سوم قرار می‌گیرد و بوسیلهٔ خود کامپیوتر و سخت‌افزار تخصیص داده شده جهت بالا بردن زمان پردازش انجام می‌شود (همانند پردازنده آرایه)

بخش اصلی سیستم کامپیوتر در شکل (۲) نمایش داده شده است.

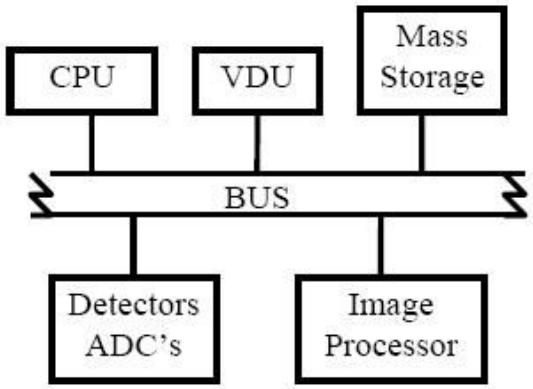


Figure 2

نتیجه بخش‌های پردازش دیجیتالی و جمع‌آوری، بدست آمدن تصویری دیجیتالی است (در اینجا بفرم گسستهٔ $x(n_1 , n_2)$ در مقایسه با سیگنال گسستهٔ $x_{(n)}$ استفاده شده است) که در حقیقت به یک ماتریس (گسسته) که سطر n_2 و ستون n_1 در آن مشخص کنندهٔ یک نقطه در تصویر است.

مقدار عنصر ماتریس متناظر $x(n_1,n_2)$ ، از نتیجه برهم‌کنش تشعشع با بافت بدست می‌آید که با یک سطح روشنایی یا سطح خاکستری روی یک صفحه مانیتور نمایش داده می‌شود. که نقطه نیز معمولاً پیکسل خوانده می‌شود. (Picture element)

شیوه نمایش تصویر:

همانطور که در شکل (۳) مشاهده می‌کنید، تصویر دیجیتالی بعنوان یک آرایه دو بعدی $x(n_1,n_2)$ یا ماتریس تصویر، در حافظه Ram سی پی یو (cpu) ذخیره شده است که ابعادش بسته به کیفیت استفاده از ۳۲×۳۲ تا ۱۰۲۴×۱۰۲۴ ممکن است متغیر باشد.

تصویر نمایش داده شده روی مانیتور (همانطور که در شکل ۳ مشاهده می‌کنید) شامل نقاط روشنایی است که روشنایی‌ها به نسبت مقدار در نظر گرفته شده در موقعیت متناظر (بایت یا کلمه) در ماتریس تصویر cpu وابسته‌اند، بدین مفهوم که به شدت تشعشعی که به آشکارساز سیستم تصویربرداری برخورد می‌کند وابسته اند.

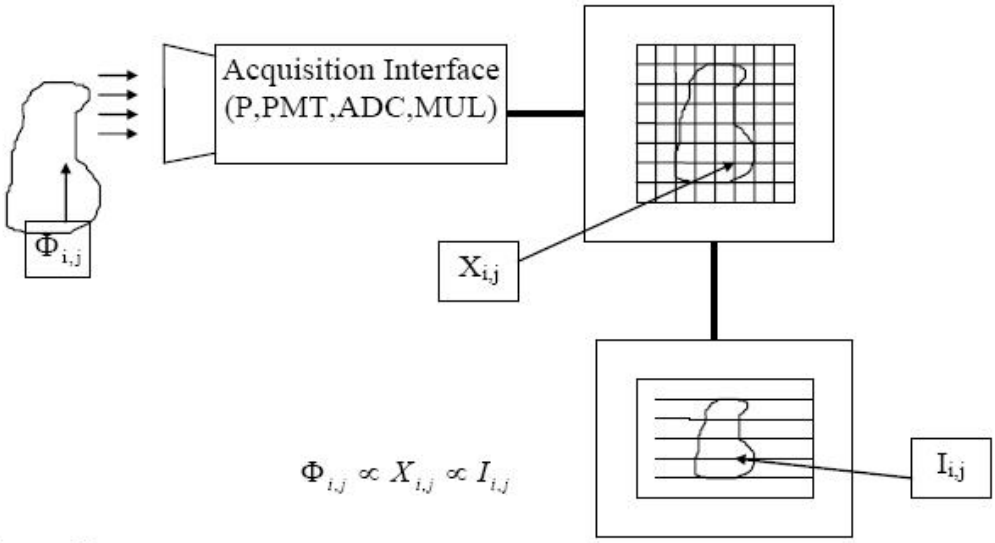


Figure (3)

واحد نمایش بصری (VDU):

همانطور که در شکل (۴) مشاهده می‌کنید این واحد شامل یک کنترل کننده و صفحه نمایش می‌باشد. کنترل کنندهٔ VDU شامل یک حافظهٔ RAM و یک میکروپروسسور است که از RAM برای ذخیره عکس جهت نمایش استفاده می‌شود. از میکروپروسسور جهت خواندن و ذخیرهٔ هر ماتریس استفاده می‌شود که نتیجهٔ آن یک ولتاژ dc است که از طریق تفنگ الکترونی VDU در DAC کاربرد دارد.

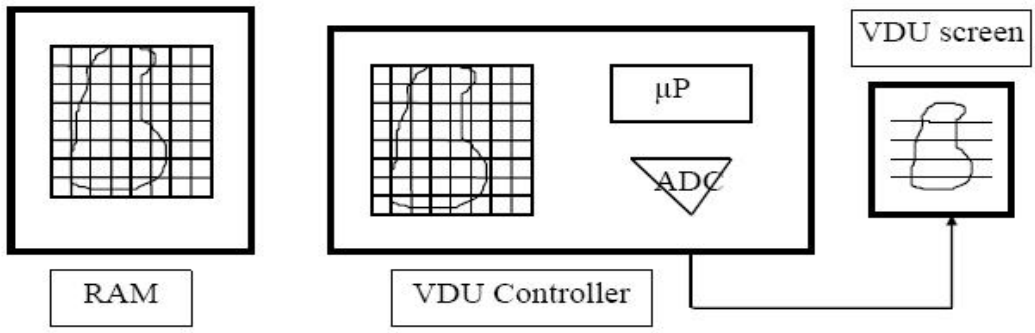


Figure 4

صفحه نمایشVDU : شامل یک تفنگ الکترونی است که هر ۱۶ نانوثانیه یا کمتر، الکترون‌ها را در خطوطی متوالی یا موازی به سمت صفحهٔ VDU پرتاب می‌کند.

در هر لحظه یک باریکهٔ الکترون بسوی لایهٔ فسفر صفحهٔ VDU شلیک می‌شود که الکترون‌ها نسبت به ارقام ذخیره شده در بیت‌های متناظر ماتریس، انرژی جنبشی کسب می‌کنند.اثر انرژی جنبشی‌ایی که باریکهٔ الکترون کسب می‌کند تشعشع حدود ۱۶ نانو ثانیه‌ای نور مرئی است. هر نقطهٔ روشن در تصویر بیانگر یک پیکسل می‌باشد که این پیکسل ساختمان یک تصویر را تشکیل می‌دهد (مثل تشکیل یک تصویر با پیکسل 1024×1024)

در این روش امکان نمایش یک تصویر ذخیره شده در حافظه RAM کنترل کننده و نگه داشتن آن در آنجا بوسیله (دوباره سازی) شتاب دادن الکترون‌ها در هر ۱۶ نانوثانیه یا کمتر به سمت صفحه نمایش وجود دارد.

سطح روشنایی پیکسل به VDU مخصوص مورد استفاده بستگی دارد اما برای اغلب سیستمهای تصویربرداری پزشکی سطوح روشنایی محصور به ۱۶ سطح روشنایی یا سطح خاکستری است که نوع مقیاس خاکستری معمولاً در بیشتر تصاویر پزشکی نمایش داده می‌شود.

۲ دلیل عمده برای محدود بودن تعداد سطوح خاکستری موجود روی صفحات اکثر سیستم‌های پزشکی وجود دارد:

دلیل اول هزینه و قیمت آن و دلیل دوم: اثبات شده که رفتار سیستم‌های نوری طـوری است که رادیولوژیست فقط قادر به تشخیص ۱۶ سطح خاکستری در یک تصویر اسـت. به هرحال برای بیشتر تصاویر پزشکی از قبیل تـصاویر CT رنـج مقـادیر یـا چگـالی در ماتریس تصویرشان بیشتر از سطح خاکستری موجود می‌باشد .(در CT حدود ۳۰۰۰) امکان نمایش دادن همه مقادیر تصویر در یک زمان وجود ندارد چـرا کـه نتیجـه آن از دست دادن کنتراست تصویر و تشخیص بد آن می‌باشد، به همـین دلیـل از تکنیکهـای بالا بردن تصویر که تکنیکهای بهبود مقیـاس خاکـستری نیـز نامیـده مـی‌شـوند بـرای نمایش بخشی از رنج مقادیر تصویر (سطوح تدریجی) در یک زمان استفاده می شود که در فصل ۲ در این مورد شرح داده شده است.

کیفیت تصاویر پزشکی:

خوب بودن کیفیت تصاویر پزشکی با توجه به نیاز پزشـک از مشخـصه‌هـای موجـود در تصویر تعیین می‌شود. به هرحال نیاز به معیاری برای تعین کیفیت تصاویر داریم که این معیارها بر اساس سه پارامتر زیر تعیین می‌شوند:

تیزی، کنتراست و نویز.

تیزی تصویر:

بیشترین اهمیت را در تشخیص جزئیات تصویر دارد، کیفیت بد تـصاویر و تیرگـی آنهـا اساساً به علت پاسخ ضربه سیستم تصویربرداری می‌باشد کـه بـه آن در اصـطلاح PSF نیز گفته می‌شود.

تیزی تصویر بوسیله رزولوشن سه بعدی تصویر تعیین می‌شود.

قبلاً تعریف کردیم که سیستم‌های تصویربرداری قادر به تشخیص کنتراست دو نقطه کم ارتفاع نزدیک به هم می‌باشند (نمایش واضح).

رزولوشن سه بعدی یا بوسیله کوچکترین فاصلهٔ بین دو نقطه کنتراست بالا تعیین می‌شود یا بوسیله شدت FWHM (تمام عرض و نیم ماکزیمم) یا بوسیله LSF (تشخیص تعداد خطوط در هر cm) و یا بوسیله MTF (مدولاسیون انتقال).

شکل ۵ مفهوم PSF را نشان می‌دهد. که آن نیز نشان دهنده فاصله FWHF می‌باشد که این پارامتر از فاصله محدود بین دو نقطه مختلف تعیین می‌شود.

روش دیگر برای تعیین تیزهای تصویر MTF می‌باشد که از گرفتن تبدیل فوریه PSF همانطور که در شکل ۶ نیز مشاهده می کنید منتج می‌شود که بصورت برش فرکانسی fco در ۵٪ ماکزیمم دامنه تعریف می‌شود.

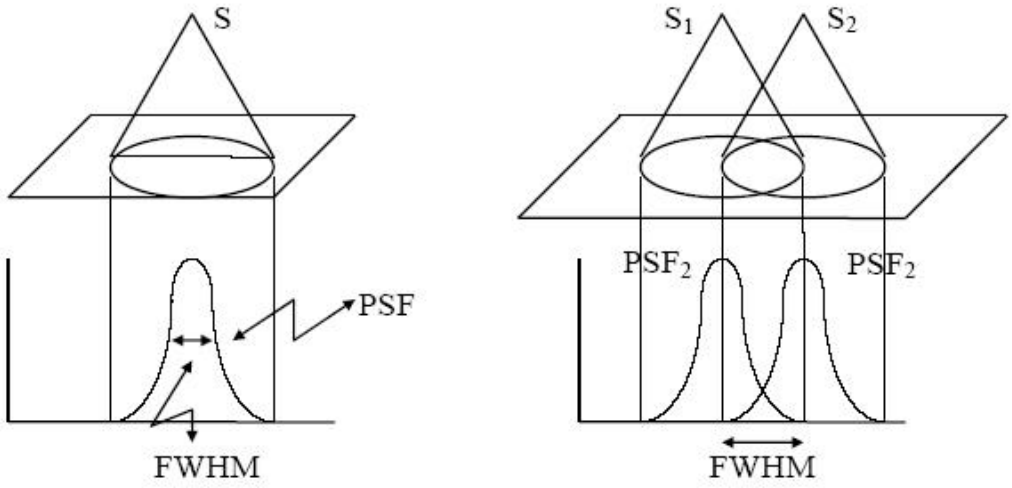


Figure 5

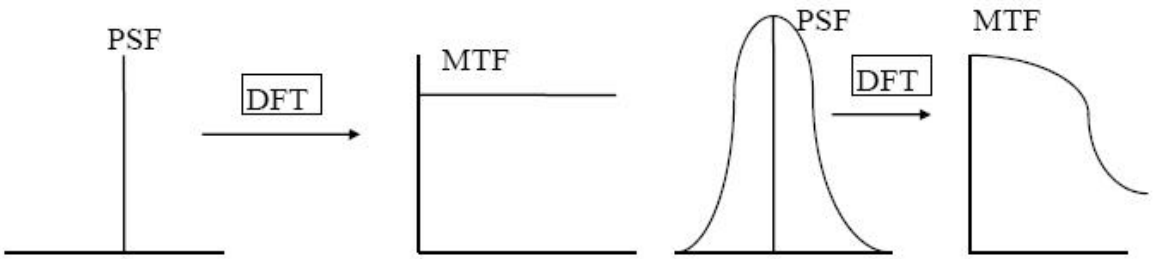


Figure 6

کنتراست تصویر:

به صورت توانایی تشخیص جزئیات تصویر کم کنتراست از محیط احاطه شده آن تعریف می‌شود. بعبارت دیگر به توانایی سیستم تصویربرداری در تشخیص تغییرات کوچک شدن تشعشعات رسیده به آشکارساز و نمایش آنها نیز گفته می‌شود.

یک منبع کاهش کنتراست تصویر، وجود نویز می‌باشد.

برای تعیین کنتراست تصویر از اصطلاح رزولوشن کنتراست استفاده می‌شود که بصورت کمترین شدت اختلاف قابل تشخیص بین یک منطقه کوچک تصویر که محیط زمینه آن می‌باشد تعریف می‌شود. کنتراست تصویر را می‌توان از رابطه ۱ مشخص کرد:

$$\%\text{contrast} = \frac{I_{area} - I_{background}}{I_{background}} x100 \qquad (1)$$

نویز تصویر، دارای ماهیتی آماری است و تابع سیگنال می‌باشد اما می‌توان بدون آسیب زیادی به تصویر،آن را به صورت نویز سفید به آن اضافه کنیم.

مشخص کردن نویز هر پیکسل تصویر پزشکی امکان پذیر و شناخته شده نیست ولی نویز کلی تصویر را می‌توان از راه‌های زیر بدست آورد:

۱- انحراف از معیار شدت پیکسل در یک ناحیه تصویر:

از رابطه ۲ می‌توان برای محاسبه انحراف از معیار استفاده کرد:

$$SD = \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \mu)^2}{N-1} \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

N: تعداد پیکسلها.

μ: میانگین شدت.

x_i: مقدار پیکسل.

۲- طیف شدت نویز، که می‌توان آن را بطور تقریبی از فرکانسهای بالای تصویر بدست آورد یعنی در جایی که نسبت سیگنال به نویز مقداری است کوچک. اگر نویز سفید باشد، در سرتاسر طیف فرکانسی سه بعدی تصویر، طیف شدت نویز ثابت خواهد بود.

در نهایت، کیفیت کلی تصویر را بطور تقریبی می‌توان از رابطه ۳ تعیین کرد:

$$Image_Quality = K\frac{(Sharpness)^2 (contrast)^2}{Noise_Power_Spectrum} \qquad (3)$$

از فرمول ۳ می‌توان جهت تعیین یک فانتوم مناسب در سیستم‌های تصویربرداری پزشکی مختلف استفاده کرد.

تبدیل فوریه گسسته برای پردازش تصویر:

تعریف: DFT یک بعدی در فرمول ۱ تعریف شده است:

$$Fx(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad (1)$$

جاییکه $x(n)$ سیگنال پریودیک گسسته‌ای در حوزه سه بعدی زمان است، N پریود $x(n)$ یا فاصله سیگنال نمونه برداری شده است. N و k زمان/ فاصله و متغیرهای فرکانسی هستند.

DFT معکوس یا IDFT در رابطه ۲ تعریف شده است.

$$x(n)= \sum_{k=0}^{N-1} Fx(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad (2)$$

همچنین جفت فوریه گسسته تعریف شده در شماره‌های ۱ و ۲ ممکن است بصورت شماره ۳ نیز نوشته شود:

$$Fx(k)= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{-kn}$$

(3a)

$$x(n)= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Fx(k) W^{kn} \qquad (3b)$$

هرجا داشته باشیم از رابطه اویلر

$$W = e^{j\frac{2\pi}{N}} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)$$

از آنجا که $F_x(k)$ مختلط است پس خواهیم داشت:

$$Fx(k)= \left|Fx(k)\right| e^{j\varphi_x(k)} = Rx(k)+ jIx(k) \qquad (4)$$

دامنه :

$$Fx(k)= \left(\left[Rx(k)\right]^2 + \left[Ix(k)\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

فاز:

$$\phi x(k)= \tan^{-1}\frac{Ix(k)}{Rx(k)}$$

توان(انرژی):

$$Px(k)= \left|Fx(k)\right|^2 \text{ ... power}$$

از روابط ۴ برای تعیین دامنه، فاز و انرژی طیف فرکانسی سیگنال گسسته x(n) استفاده می‌شود.

DFT دوبعدی:

برای یک ماتریس تصویر $N_1 \times N_2$ ، جفت DFT دوبعدی از مقایسه روابط ۱و۲ در رابطه ۵ تعریف می‌شود:

$$Fx(k_1,k_2)=\frac{1}{N_1}\frac{1}{N_2}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\left[\sum_{n_1=0}^{N_1-1}x(n_1,n_2)W^{-k_1n_1}\right]W^{-k_2n_2} \qquad (5a)$$

$$x(n_1,n_2)=\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\left[\sum_{k_1=0}^{N_1-1}Fx(k_1,k_2)W^{k_1n_1}\right]W^{k_2n_2} \qquad (5b)$$

از (5a) ما داریم:

$$Fx(k_1,k_2)=\frac{1}{N_2}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\left[\frac{1}{N_1}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}x(n_1,n_2)W^{-k_1n_1}\right]W^{-k_2n_2}$$

or

$$Fx(k_1,k_2)=\frac{1}{N_2}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\left[Fx'(k_1n_2)\right]W^{-k_2n_2} \qquad (6a)$$

where

$$Fx'(k_1,n_2)=\frac{1}{N_1}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}x(n_1,n_2)W^{-k_1n_1} \qquad (6b)$$

در (6b) ، n_2 ثابت و n_1 متغیر در نظر گرفته شده است، واضح است که (6b) ، DFT یک بعدی ستون n_2 تصویر است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که مرحله نخست برای محاسبه DFT دوبعدی یک تصویر $N_1 \times N_2$ ، به فرم یک ماتریس مختلط $N_1 \times N_2$ جدید می‌باشد که از DFT یک بعدی گرفتن از ستونهای ماتریس تصویر بدست می‌آید.

در رابطه (6a) ، k_1 ثابت و n_2 متغیر در نظر گرفته شده است، همچنین رابطه (6a) ، DFT یک بعدی از سیکنال دوبعدی مختلط $F_x(k_1,n_2)$ می‌باشد که سطر k_1 از ماتریس تصویر مختلط جدید، از میانگین گیری از رابطه (6b) در مرحله قبل بدست می‌آید. بنابراین، مرحله دوم و پایانی محاسبه DFT یک ماتریس تصویر $N_1 \times N_2$ ، گرفتن DFT یک بعدی از سطرهای ماتریس تصویر مختلط بدست آمده در مرحله ۱ و قرار دادن نتایج آنها در ماتریس مختلط $N_1 \times N_2$ پایانی می‌باشد.

در ادامه یک روش مشابه برای محاسبه IDFT آورده شده است، برای محاسبه تبدیل فوریه یک تصویر $x(n_1,n_2)$ معمولاً از تبدیل فوریه سریع (FFT) استفاده می‌شود.

خواص DFT:

قضیه شیفت

حالت یک بعدی:

$$\text{if } \text{1-d DFT}[x(n)] = Fx(k) \quad \text{then 1-d DFT}[x(n-h)] = W^{-kh}Fx(k) \quad (1)$$

همچنین

$$\text{if } \text{1-d IDFT}[Fx(k)] = x(n) \quad \text{then 1-d IDFT}[Fx(k-h)] = W^{kh}x(n) \quad (2)$$

حالت دوبعدی:

$$\text{if } \ 2\text{-d DFT}[x(n_1,n_2] = Fx(k_1,k_2) \qquad \text{then}$$
$$2d_DFT[x(n_1-h_1,n_2-h_2)] = W^{-(k_1h_1+k_2h_2)}\, Fx(k_1,k_2) \qquad (3)$$

همچنین

$$\text{if } \ 2d_\ IDFT[Fx(k_1,k_2)] = x(n_1,n_2) \qquad \text{then}$$
$$2d_IDFT[Fx(k_1-h_1,k_2-h_2)] = W^{(n_1h_1+n_2h_2)}\, x(n_1,n_2) \qquad (4)$$

حالا اگر $n1=n2=N/2$

$$W^{(n1h1+n2h2)}\, x(n1,n2)=\ldots=(-1)^{n1+n2}x(n1,n2) =$$
$$= 2-d \ \ IDFT\left[Fx\left(k_1-\frac{N}{2},k_2-\frac{N}{2}\right)\right] \qquad (5)$$

بنابراین اگر ما ماتریس تصویر $x(n_1,n_2)$ را در فاکتور $(-1)^{n_1+n_2}$ ضرب کنیم می‌توانیم مبدأ را در حوزه فرکانس به نقطه $(N/2, N/2)$ شیفت دهیم، این عمل وقتی که ما بخواهیم دامنه یا طیف انرژی یک تصویر را نمایش دهیم اغلب مفید و سودمند خواهد بود.

پریودیک:

حالت یک بعدی:

در تعریف DFT (رابطه ۱) ، سیگنال گسسته $x(n)$ ، پریودیک با پریود شبیه به طول سیگنال ذکر شده بود.

بدین معنی که $x(n)= x(n+N)$

که $n:0,1,2,\ldots,N-1$ و N معرف پریود می‌باشد.

DFT گرفتن از $x(n)$ که بصورت $F_x(k)$ می‌باشد و $k:0,1,2,\ldots,N-1$ یک سیگنال مختلط پریودیک با پریود N که مشابه پریود N سیگنال $x(n)$ می‌باشد.

البته یک پریود از سیگنال $x(n)$ یا سیگنال مختلط $F_x(k)$ بترتیب برای مشخص کردن کامل DFT و IDFT کافی می‌باشد.

حالت دوبعدی: بطور مشابه اینجا نیز داریم:

$$Fx(k_1,k_2)=Fx(k_1+N,k_2)=Fx(k_1,k_2+N)=Fx(k_1+N,k_2+N) \qquad (6)$$

قضیه مختلط توأم:

حالت DFT یک بعدی قضیه مختلط توأم:

$$Fx\left(\frac{N}{2}+L\right)=F_x^*\left(\frac{N}{2}-L\right) \qquad (7)$$

که

$L= 0,1,2,\ldots,N/2-1$ و $Fx^*(N/2-L)$ مختلط توأم می‌باشد.

به عبارت دیگر ما فقط بی نیاز به محاسبه نیمی از DFT سیگنال $x(n)$ داریم. از طرفی دیگر، مختلط توأم از مقادیر $N/2$ اول $F_x(k)$ می‌باشد.

$$\left|Fx\left(\frac{N}{2}+L\right)\right|=\left|F_x^*\left(\frac{N}{2}-L\right)\right| \qquad (8)$$

از $F_x(k)$ داده شده در رابطه ۸ ما می‌توانیم خاصیت هم اندازه بودن آنها را ثابت کنیم، معمولاً یک روش برای اثبات طیف فرکانسی یک سیگنال، شیفت دادن آن با $N/2$ در

حوزه فرکانس می‌باشد. نحوه گرفتن DFT از $x(n)$ $(-1)^n$ در پاراگراف قـضیه شـیفت توضیح داده شده است.

حالت دوبعدی:

مشابه با حالت یک بعدی اینجا نیز قضیه مختلط توأم را داریم:

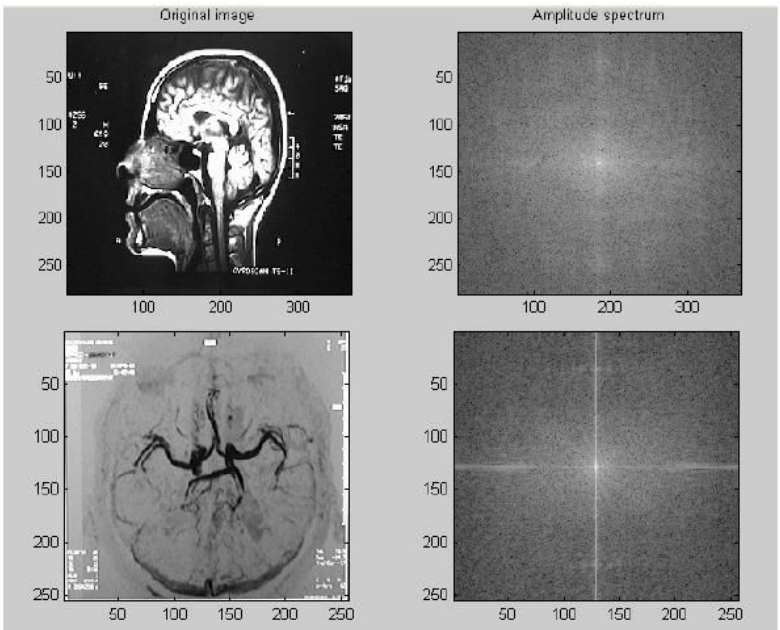
$$Fx\left(\frac{N}{2}+L_1,\frac{N}{2}+L_2\right)=F_x^*\left(\frac{N}{2}-L_1,\frac{N}{2}-L_2\right) \qquad (9)$$

که $L1,L2=0,1,2,\ldots,N/2-1$

همچنین ما برای نمایش طیف فوریه یک عکس از رابطه (۱۰) استفاده می‌کنیم:

$$\left|Fx(k1,k2)\right|=\left|2d-DFT\left[(-1)^{n1+n2}x(n1,n2)\right]\right| \qquad (10)$$

شکل (۷) عکس و جابه‌جایی طیف فوریهٔ آن به میزان $(N/2, N/2)$ را نشان می‌دهد.



Σχήμα 7

قضیه کانولوشن / همبستگی:

حالت یک بعدی:

قضیه کانولوشن گسسته بین دو سیگنال پریودیک $x_{1(n)}$ و $x_{2(n)}$ در رابطهٔ (۱۱) تعریف شده است:

$$z(n)= x_1(n)* x_2(n)= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2(m-n) \qquad (11)$$

هرکجاعلامت‌های (*) باشدعمل کانولوشن صورت می گیرد.

بطور مشابه همبستگی گسستهٔ بین دو سیگنال نیز تعریف می‌شود.

$$z'(n)= x_1(n)\otimes x_2(n)= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2(m+n) \qquad (12)$$

علامت‌های ⊗ نشان دهنده عمل همبستگی است.

می‌توان اثبات کرد با گرفتن DFT از (۱۱) و (۱۲) داریم:

$$DFT[z(n)] = DFT[x_1(n)*x_2(n)] = Fx_1(k)Fx_2(k) = Fz(k) \qquad (13)$$

$$DFT[z'(n)] = DFT[x_1(n)\otimes x_2(n)] = Fx_1^*(k)Fx_2(k) = Fz'(k) \qquad (14)$$

آنجاکه عبارت $F^*_{x1}(k)$ ، مختلط توأم $F_{x1}(k)$ را مشخص می‌کند.

روابط ۱۳ و ۱۴ نشان می‌دهد که ما می‌توانیم با ضرب دو سیگنال در حوزه فرکـانس و گرفتن DFT معکوس از آنها، کانولوشن و یا همبستگی را بدست آوریم.

روابط ۱۳ و ۱۴ به قضایای کانولوشن و همبستگی مروبط می‌باشند.

Warp-arrounderror:خطایی است که از کانولوشن دو سیگنال گسسته $x_1(n)$ و $x_2(n)$ از N فاصله (پریود) ناشی می‌شود. و کانولوشن آنها معمولاً یک سیگنال پریودیک از N فاصله می‌باشد.

به هرحال در برخی از تصاویر پزشکی این خطاها جدی نیستند و می‌توان با تقریب خوبی از آنها چشم پوشی کرد. البته باید افزایش در محاسبات ناشی از ۲ برابر شدن اندازه ماتریس تصویر را مدنظر داشته باشیم.

حالت ۲بعدی:

از مقایسه روابط ۱۳ و ۱۴ برای قضایای کانولوشن و همبستگی در حالت دوبعدی داریم:

$$z(n_1,n_2)= x_1(n_1,n_2)*x_2(n_1,n_2)= \frac{1}{N}\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1}x_1(m,l)x_2(m-n_1,l-n_2) \quad (15a)$$

$$z(n_1,n_2)=2d_IDFT\left[Fx_1(k_1,k_2)Fx_2(k_1,k_2)\right] \quad (15b).$$

$$z'(n_1,n_2)= x_1(n_1,n_2)\otimes x_2(n_1,n_2)= \frac{1}{N}\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1}x_1(m,l)x_2(m+n_1,l+n_2) \quad (16a)$$

$$z'(n_1,n_2)=2d_IDFT\left[Fx_1^*(k_1,k_2)Fx_2(k_1,k_2)\right] \quad (16b).$$

بالابردن کیفیت تصویر:

هدف از تکنیک بالا بردن کیفیت تصویر، بهبود مناسب کیفیت تصویر می‌باشد بطوریکه در پایان تصویری داشته باشیم که از کیفیت بالایی جهت مشاهدهٔ پزشک برخوردار باشد.

تکنیکهای مختلفی برای بالا بردن کیفیت تصویر وجود دارد که بسته به مشاهده پزشک و کاربرد آن در موارد خاص به کار گرفته می‌شوند که می‌توان ایـن تکنیـک‌هـا را در ۲ دسته اصلی تقسیم کرد:

۱- دستکاری کردن سطوح خاکستری به منظور افزایش کنتراست تصویر.

۲- دستکاری کردن ماتریس تصویر به منظور کاهش نویز تصویر و تیرگی آن.

نظر به اینکه روش کانولوشن را می‌توان در هر دو حوزه فرکانس یا فضایی (سه بعـدی) انجام داد، بالا بردن کیفیت تصویر از طریق اصلاح ماتریس تصویر را نیز، می‌توان در هر دو حوزه انجام دهیم. به همین دلیل در این درس، بالا بردن کیفیـت تـصویر در هـر دو حوزه بررسی شده است. ابتدا، تکنیکهای دستکاری سطح خاکستری را بررسی می‌کنیم:

۱- تکنیکهای دستکاری سطح خاکستری:

تکنیکهای بالا بردن کیفیت تصویر، اگرچه انجام دادن آنها ساده و آسان است ولی نتایج مؤثری را به دنبال دارند. این تکنیکها با مشکلی که در بیشتر تصاویر پزشـکی مـشاهده می شود و آن بزرگتر بودن مقدار رنج ماتریس تصویر (سطوح تـدریجی) از رنـج شـدت مورد نظر یا سطوح خاکستری موجود است کاربرد دارند.

هرگونه تلاشی برای نمـایش کـل رنـج مـاتریس تـصویر نتیجـه‌ای جـز از دسـت دادن کنتراست تصویر درپی ندارد.

در اینجا ما دو تکنیک دستکاری سطح خاکستری را داریم:

۱- تکنیکهای پنجره و ۲- تکنیکهای تغییر هیستوگرام.

که در بسیاری از موارد در سیستم‌های تصویربرداری پزشکی کامپیوتری از یکی از ایـن دو روش استفاده می‌شود.

۱- تکنیکهای پنجره:

در تکنیکهای پنجره فقط بخشی از مقادیر ماتریس تصویر با سطح خاکستری موجود در یک زمان نمایش داده می‌شود.

اصطلاح "window" به بخشی از رنج مقدار تصویر که نمایش داده مـی‌شـود مربـوط است. اصل پنجره در شکل ۱ نمایش داده شده است.

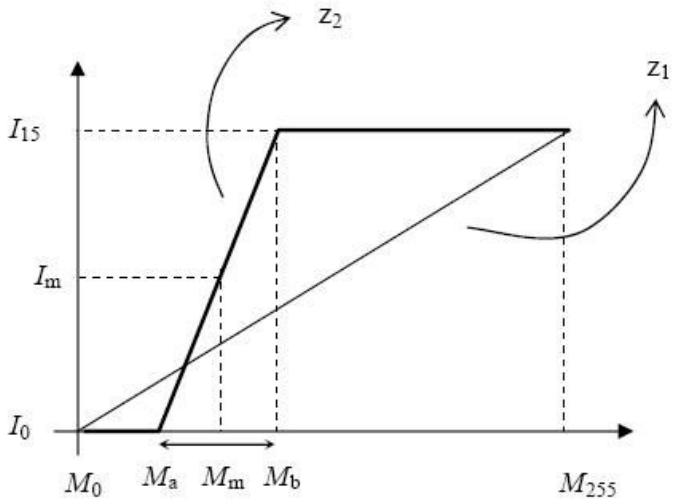


Figure 1(a)

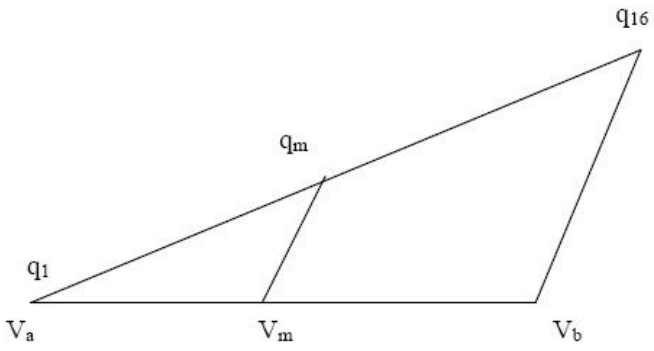


Figure 1(b)

اجـازه دهیـد مقـادیر تـصویر (تـدریجی) را ۲۵۶ ($۲^۸$) فـرض کنـیم (از v_1 تـا v_{256}) و همچنین سـطوح خاکـستری VDU را ۱۶ ($۲^۴$) در نظـر بگیـریم (از g_1 تـا g_{16}) کـه

بترتیب روی محورهای افقی و عمودی شکل ۱ نمایش داده شده‌اند. یک راه نمایش تصویر (روشی برای نمایش z_1) این است که کل رنج ۲۵۶ مقدار تصویر را به ۱۶ سطح خاکستری اختصاص دهیم. در این روش هر یک از ۱۶ سطح خاکستری، ۱۶ مقدار تصویر پی درپی ($\frac{256}{16}$) را روی صفحه نمایش می‌دهند که یک تصویر با کنتراست پایین را بوجود می‌آورند.

در روش دیگر (روش نمایش z_2) یک رنج از مقادیر $[v_a,v_b]$ را انتخاب می‌کنیم (بعنوان مثال ۶۴) و رنج ۱۶ سطح خاکستری مورد استفاده را نمایش می‌دهیم. در این حالت ۴ مقدار تصویر پی‌درپی به هر سطح خاکستری اختصاص داده می‌شود بنابراین بخشی از تصویر با کنتراست بالا نمایش داده می‌شود.

الگوریتمی که سطح خاکستری (q_m) را با هر مقدار (v_m) رنجی که به آن اختصاص داده شده است$[v_a,v_b]$ محاسبه می‌کند در زیر آورده شده است، از تشابه مثلثات در شکل (1b) به آسانی می‌توان کسرهای زیر را بدست آورد:

$$\frac{q_{16}-q_1}{V_b-V_a}=\frac{q_m-q_1}{V_m-V_a} \quad \text{or}$$

$$q_m=\frac{q_{16}-q_1}{V_b-V_a}(V_m-V_a)+q_1 \quad \text{for } V_a \le V_m \le V_b$$

$$\text{or } = q_1 \quad \text{for } V_m<V_a \qquad (1)$$

$$\text{or } = q_{16} \quad \text{for } V_m>V_b$$

توضیحات:

۱- $[v_a,v_b]$ پنجره و همچنین v_b-v_a عرض پنجره نامیده می‌شوند که معمولاً بعنوان اولین پارامتر برای نمایش یک تصویر پزشکی توسط کاربر انتخاب می‌شوند.

۲- مقدار میانگین $\frac{v_b+v_a}{2}$ یا سطح پنجره و یا سطح که بعنوان پارامتر دوم توسط کاربر انتخاب می‌شود.

موقعیت (یا مقدار) رنج مقدار تصویر را از چپ و راست پنجره‌هایی که نسبتاً امتداد دارند مشخص می‌کند. شکل (۲) تعدادی تصویر را در یک سطح پنجره نمایش می‌دهد:

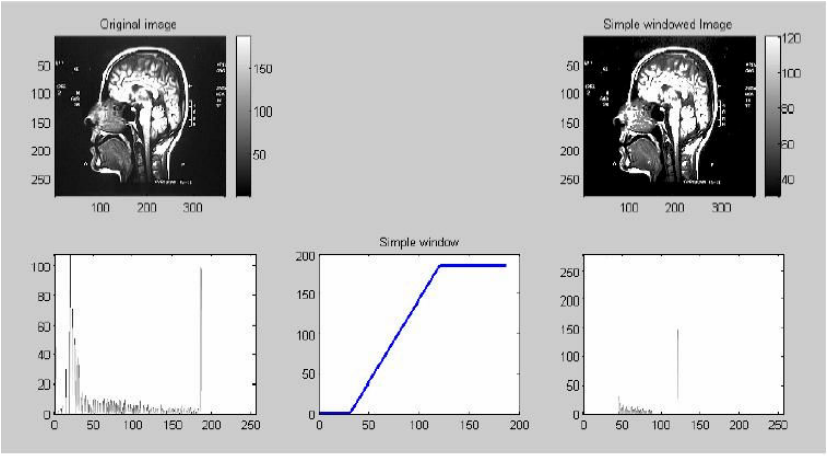


Figure 2.

۳- به دلایل مشابه ذیل، در بعضی موارد ممکن است ما دو پنجره در سطوح مختلف داشته باشیم (همانند شکل 3a). این حالت خاصی است و زمانی که سیستم VDU دارای تعداد زیادی سطوح خاکستری باشد مفید واقع می‌شود (مثلاً ۶۴ یا ۲۵۶).

در این حالت، بخش‌های متغیر یک تصویر (از قبیل شش‌ها و ستون فقرات در تصاویر CT) را می‌توان همزمان و با کنتراست خوب نمایش داد.

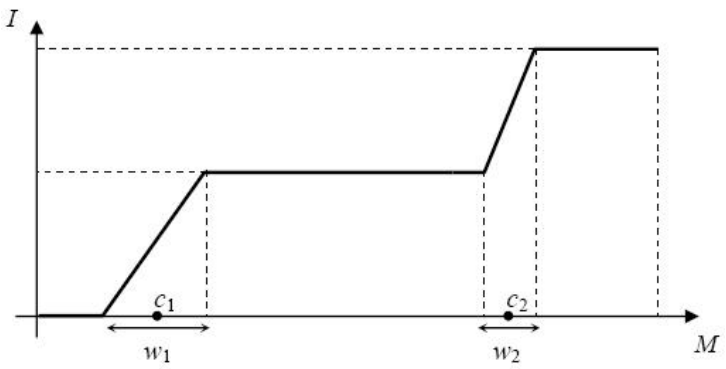


Figure 3(a): Double window

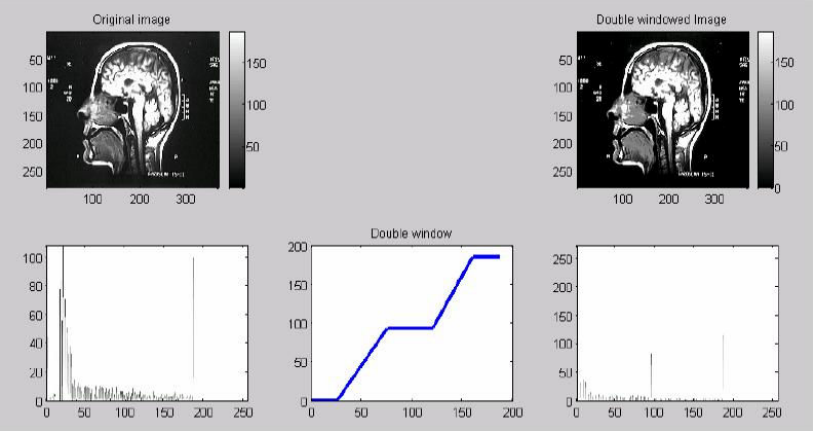


Figure 3(b): Double window and histograms.

۴- روش‌هایی که مقادیر تصویر قادر به تعیین سطوح خاکستری هستند همیشه خطی نیستند و ممکن است اشکال دیگری را همانطور که در شکل (3c) مشاهده می‌کنید داشته باشند.

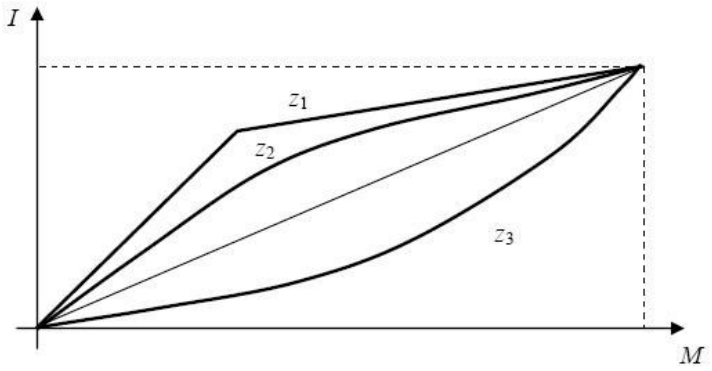


Figure 3c: Non-linear functions of windowing.

تکنیک‌های تغییر هیستوگرام:

هیستوگرام، نمایش هندسی از تعدادی پیکسل‌های تعیین کنندهٔ هر سطح خاکستری تصویر دیجیتالی می‌باشد.

نمایش هر تصویر پزشکی، هیستوگرام مخصوص به خود دارد و تکنیک‌های تغییر هیستوگرام تلاش می‌کند تا بوسیله تغییر هیستوگرام تصویر، کنتراست آن را بالا ببرد. هیستوگرام جدید به ما یک تصویر واضح یا یک هیستوگرام با تعداد پیکسل‌های برابر در سطح خاکستری می‌دهد.

این حالت اخیر که در بیشتر سیستم‌های پزشکی مرسوم است بعنوان روش یا تکنیک همسان‌سازی هیستوگرام نامیده می‌شود.

الگوریتم همسان‌سازی هیستوگرام:

اجازه بدهید n_i را هیستوگرام یک تصویر در نظر بگیریم که به ۲۵۶ سطح ارقام آن تبدیل شده است و در خط (۱) آن را مشاهده می‌کنید که بطور فرضی انتخاب شده‌اند و صفحه VDU می‌تواند ۸ سطح خاکستری مجزا را بوجود آورد.

n_i را نیز هیستوگرام تصویر همسان‌سازی شدهٔ جدید در نظر می‌گیریم که در آن تعداد پیکسل‌های یکسان تعیین کننده سطح خاکستری را خواهیم داشت.

Table 1: Histogram equalization example.

	00	32	64	96	128	160	192	225 : Look up table
	31	63	95	127	159	191	224	256 : of diplay routine.
i:	0	1	2	3	4	5	6	7 : Greylevels
h_i:	2	4	12	14	14	12	4	2 : Original Histogram
n_i:	8	8	8	8	8	8	8	8 : Equalization Hist.

توصیف الگوریتم:

بعنوان یک اصل کلی از n_i با قرض گرفتن پیکسل‌ها از h_i طبق شرح ذیل داریم:

۱- $n_0 = h_0 + h_1 + 2h_2$ ، جاییکه $2h_2$ مشخص می‌کند که ما ۲ پیکسل از ۱۲ پیکسل h_2 را انتخاب کرده‌ایم طبق یکی از اصول زیر:

الف) ما پیکسل‌هایی را انتخاب می‌کنیم که مقدار ماتریس متناظرشان نزدیکتر به ۶۳ مقدار مجاور h_1 باشد (خط ۱ را مشاهده کنید).

ب) ۲ پیکسل رندوم را انتخاب می‌کنیم.

انتخاب همه پیکسل‌های h_0 و h_1 و $2h_2$ اکنون سطح خاکستری را مشخص می‌کنند بنابراین در اثر آن اکنون پیکسل‌های تصویر تحت یک سطح خاکستری یکسان فشرده سازی شده‌اند.

۲- $n_1 = 8h_2$، که ۸ تا از ۱۰ پیکسل باقیمانده h_2 می‌باشد که به فرم n_1 استفاده می‌شود و ۲ پیکسل دیگر برای تشکیل n_2 استفاده می‌شود.

۳- $n_2 = 2h_2 + 6h_3$

مشاهده می‌کنیم که ۱۲ نقطه از h_2 را داریم که در میان ۳ سطح خاکستری از هیستوگرام همسان سازی شده پخش و گسترش یافته‌اند. n_0, n_1, n_2

این بدان معنی است که اکنون ما می‌توانیم آن نقاط را روی صفحه تشخیص دهیم، یا اینکه بگوییم کنتراست تصویر بهبود یافته است. شکل ۴ نتیجه کاربرد تکنیک همسان سازی هیستوگرام را نشان می‌دهد.

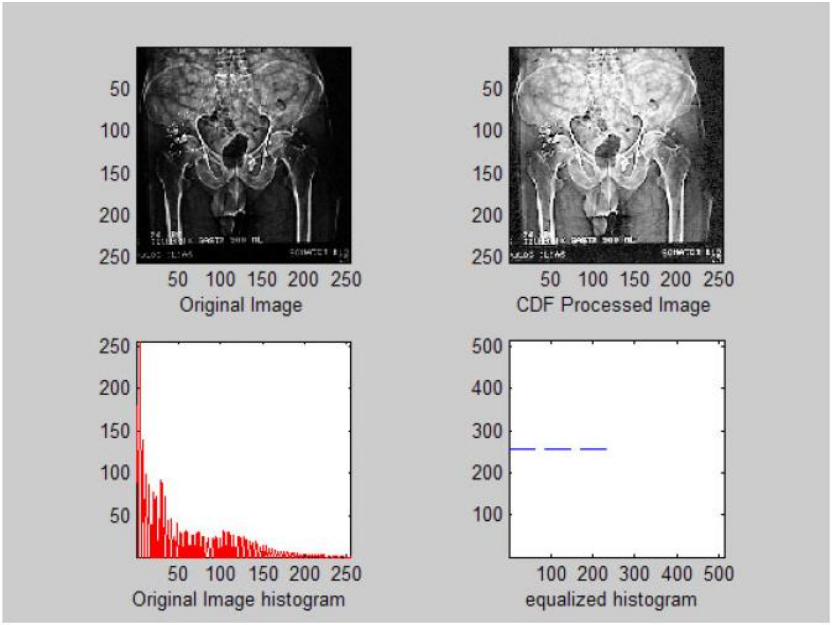


Figure 4

CDF: مبنای تغییر هیستوگرام

CDF: تابع توزیع تجمعی

$$\sum_{k=0}^{i} h(k) = \sum_{k=0}^{i} g(k), i = 0,2,3,..,7$$

Grey levels	h(i)	CDFh(i)	q(i)	CDFq(i)	
0	1(0)	1	16	16	Σ
1	7(0)	8	16	32	Σ
2	21(1)	29	16	48	Δ
3	35(3)	64	16	64	Δ
4	35(5)	99	16	80	Δ
5	21(6)	120	16	96	Δ
6	7(7)	127	16	112	Σ
7	1(7)	128	16	128	Σ

$$t = (\text{int})\left(\frac{CDFh(i)}{16} - 1\right)$$

برای تقریب و محاسبه سریع از رابطه فوق استفاده می‌کنیم. نتایج را می‌توانید در شکل ۵ ملاحظه بفرمایید.

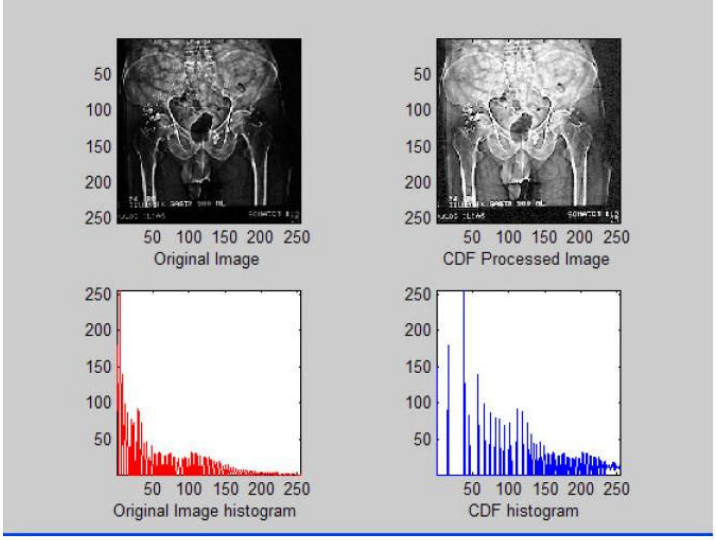


Figure 5

تکنیک‌های دستکاری نمودن ماتریس تصویر در حوزه زمان

این تکنیک‌ها تلاش می‌کنند تا یکی از منابع تنزل دادن تصویر که بوسیله مدل تنزل کلی تصویر بیان می‌شود کاهش دهد، که از معادله ۱ بدست می‌آید:

$$x^*(n_1,n_2)= x(n_1,n_2)*h(n_1,n_2)+ d(n_1,n_2) \qquad (1)$$

۱- عبارت کانولوشن $x(n_1,n_2)*h(n_1,n_2)$ معمولاً باعث از بین رفتن فرکانس‌های میانی تا بالای تصویر می‌شود که در نهایت سبب مات شده لبه‌ها و محدوده‌های تصویر و از بین رفتن جزئیات تصویر می‌شود.($h(n_1,n_2)$ مشابه تابع گسترش نقطه یا PSF سیستم است).

۲- کاهش دادن نویز $d(n_1,n_2)$ که طبیعت ثابت دارد و بهترین تقریب این است که آن را بصورت سیگنال مستقل و جمع شونده در نظر گرفت (تقریباً وابستگی سیگنال ممکن است شدید باشد).

نویز اغلب در فرکانس‌های بالای تصاویر پزشکی وجود دارد و هنگامی که دامنه آن از اختلاف چگالی دو ناحیه همسایگی آن بزرگتر باشد، آنگاه جداسازی این دو ناحیه مشکل خواهد بود.

هموار کردن تصویر:

هموار کردن تصویر بر تکنیک‌هایی تمرکز دارد که برای حذف کردن نویز که به هر دلیلی (اعم از نمونه برداری، انتقال، طبیعت ثابت تشعشع و ...) در تصویر وجود دارد،

بکار می‌روند. معمولاً نویز تصاویر پزشکی ثابت است و بطور عمده در باند بالای فرکانس تصویر وجود دارند. بنابراین، تکنیک‌های صاف کردن تصویر تحت تأثیر تکنیک‌های حذف فرکانس‌های بالا و یا تکنیک‌های فیلتر کردن پایین گذر می‌باشند.

یکی از مواردی که باید دقت شود حذف اطلاعات مفید تصویر است که سبب، مات شدن نواحی تصویر و جزئیات تصویر می‌شود. بنابراین بایستی محتوی صاف کردن تصویر مورد ارزیابی قرار گیرد.

میانگین گیری محلی:

۱- حالت یک بعدی: شکل ۱ فرایند تنزل سیگنال $x(n)$ از سیستم $h(n)$ با نویز جمع شونده $d(n)$ را نشان می‌دهد. خروجی سیگنال $y(n)$ بوسیله معادله (۱) نشان داده شده است:

$$y(n)=x(n) * h(n)+d(n)=x'(n)+d(n) \quad (1)$$
$$\text{where } x'(n)=x(n)*h(n)$$

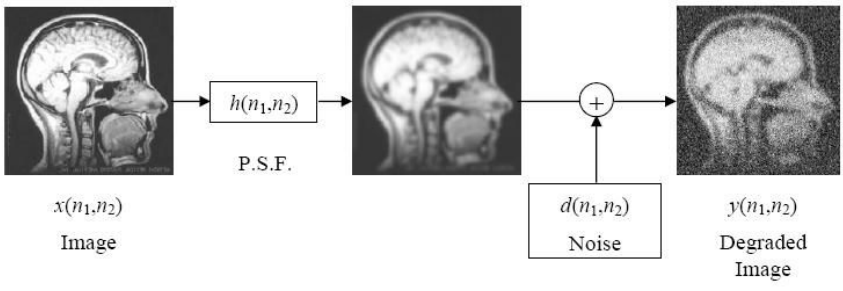


Figure 1

اجازه دهید فرض کنیم $h_f(n)$ یک فیلتر دیجیتال به پاسخ ضربه باشد بنابراین سیگنال $y(n)$ سیگنال فیلتر شده است که در زیر نشان داده شده است:

$$\text{If } h_f(n)=\frac{1}{N}[1,1,1,\ldots,1] \quad (\text{قسمت } N)$$

پس خروجی فیلتر شده $y'(n)$ بدست می‌آید:

$$y'(n)=y(n) * h_f(n)=[x'(n)+d(n)] * h_f(n)= \tag{2}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}[x'(n-k)+d(n-k)]h_f(k) \tag{3}$$

اکنون برای $N=2$,$hf(n)= 1/2\ [1,1]$ و از ۳

$$y'(n)=\frac{1}{2}(x'(n)+x'(n-1))+\frac{1}{2}(d(n)+d(n-1)) \tag{4}$$

بطور مشابه برای $N=M$

$$y'(n)=\frac{1}{M}(x'(n)+x'(n-1)+\ldots+x'(n-M))+\frac{1}{2}(d(n)+d(n-1)+\ldots+d(n-M)) \tag{5}$$

اکنون، اگر نویز را نویز سفید در نظر بگیریم، ما انتظار داریم که مقدار متوسط بـه صـفر برسد، بنابراین مقادیر بزرگتر M در معادله (۵) در قسمت دوم معادله (۵) به صفر میل می‌کند. در نتیجه، هنگامی که می‌خواهیم نـویز را از سـیگنال $x(n)$ فیلتـر کنـیم، هـر نقطه سیگنال را با میانگین نقاط همسایه M جایگزین می‌کنیم.

بایستی به تعداد نقاط M توجه داشته باشیم. هنگامی که مقدار M بزرگ باشد مقـادیر فرکانس بالای سیگنال حذف می‌شود. معمولاً معادله (۵) در (۶) بکار می‌رود.

$$y'(n)=\frac{1}{M}\sum_{k=-\frac{M-1}{2}}^{k=\frac{M-1}{2}}x(k) \qquad (6)$$

که M مقادیر مفرد است یعنی M=3,5,7,...

بعضی اوقات این فیلتر به فیلتر میانگین گیر حرکت کننده شناخته می‌شود چون بطـور محلی در عرض سیگنال حرکت می‌کند.

پاسخ فرکانسی میانگین دو نقطه‌ای:

مطلوب، این است تا مقدار پاسخ فرکانسی فیلتر میانگین محلی را مشخص کنـیم بـرای رسیدن به این مطلوب فرض کنیم که آن یک فیلتر پایین گذر است. برای این منظـور، یک میانگین دو نقطه که بوسیله معادله ۷ نشان داده شده است فرض می‌کنیم:

$$y(n)=\frac{1}{2}\left(x(n)+x(n-1)\right)+\frac{1}{2}\left(d(n)+d(n-1)\right) \qquad (7)$$

where n:0,1,2,...,N-1.

اگر عبارت نویز در ۷ را ناچیز تلقی کنیم ۸ بدست می آید:

$$y(n)=\frac{1}{2}\left(x(n)+x(n-1)\right) \qquad (8)$$

با DFT گرفتن از ۸

$$Fy(k)=DFT\left(\frac{x(n)}{2}\right)+DFT\left(\frac{x(n-1)}{2}\right)=\frac{Fx(k)}{2}+W^{-k}\frac{Fx(k)}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}\right)Fx(k)$$

که نتیجه میدهد

$$Fy(k) = Fh(k)\, Fx(k) \qquad (9)$$

که: $$\text{where, } Fh(k)= \frac{1}{2}\left(1+ e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}\right) \qquad (10)$$

با بکاربردن روابط مثلثاتی ۱۱

$$\cos(\varphi)=2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)-1 \ , \ \sin(\phi)=2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \qquad (11)$$

داریم:

$$Fh(k)= \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)e^{-j\left(\frac{\pi k}{N}\right)} \qquad (12)$$

واضح است که :

$$\left|Fh(k)\right| = \left|\cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)\right| \text{ and } \left|\phi(k)\right| = -\frac{\pi k}{N} \qquad (13)$$

که یک فیلتر پایین گذر است .

حالت دوبعدی یا فیلتر میانگین محلی:

اجازه دهید که معادله تنزل تصویر را بوسیله معادله ۱۴ توصیف کنیم:

$$y(n_1,n_2)= x(n_1,n_2)* h(n_1,n_2)+ d(n_1,n_2) \qquad (14)$$

همچنین روش فیلتر کردن بوسیله ۱۵ نشان داده می شود:

$$y'(n_1,n_2)= y(n_1,n_2)*h_f(n_1,n_2) \qquad (15)$$

حال، اجازه دهید که $h_f(n_1,n_2)$ از ۱۶ بدست آید:

$$h_f(n_1,n_2)= \frac{1}{M} \begin{matrix} 1 & 1 & \dots. & 1 \\ 1 & 1 & \dots. & 1 \\ & & \dots\dots\dots & \\ 1 & 1 & \dots. & 1 \\ 1 & 1 & \dots. & 1 \end{matrix} \qquad (16)$$

پس معادله ۱۶ می‌تواند به شکل معادله ۱۷ نوشته شود:

$$y'(n_1,n_2)= y(n_1,n_2)*h_f(n_1,n_2)=$$

$$= \sum_{l=-\frac{M-1}{2}}^{l=\frac{M-1}{2}} \sum_{k=-\frac{M-1}{2}}^{k=\frac{M-1}{2}} x(n_1-l,n_2-k)h_f(l,k) \qquad (17)$$

فرض کنید $M=3$ پس معادله ۱۷ یک ماتریس ۳×۳ را نتیجه می‌دهد که در طول تمام تصویر حرکت می‌کند که بطور محلی یک کانولوشن دوبعدی انجام می‌گیرد. این موضوع در شکل ۳ نشان داده شده است.

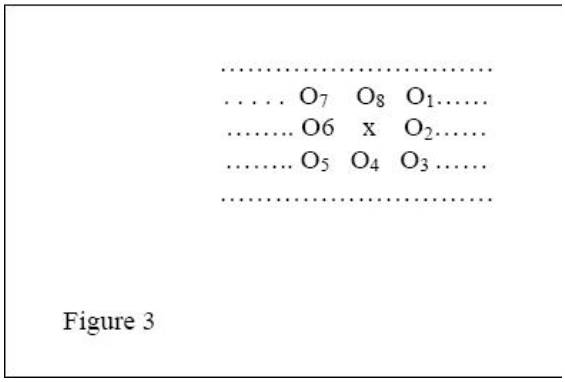


Figure 3

برای توضیحات بیشتر، نقاط در ماتریس تصویر یا مقادیر $Q_1,Q_2,\ldots$ و x نقطه‌ای است که $y(n_1,n_2)$ در آن محاسبه می‌شود. پس عملیات کانولوشن در معادله ۱۶ به سادگی بوسیله ۱۸ نشان داده شده است.

$$y = \frac{1}{9}\left(\sum_{i=1}^{8} Oi + x\right) \qquad (18)$$

$$h_f(n_1,n_2) = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

حال، روش‌های فیلتر کردن مختلفی حول نقطه x با وزن‌های مختلف وجود دارد. معروفترین آنها در شکل ۱۹ شرح داده شده‌اند.

$$SM_1 = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{Smoothing Mask 1}$$

$$SM_2 = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{Smoothing Mask 2}$$

$$SM_3 = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{Smoothing Mask 3} \qquad (19)$$

$$SM_4 = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{Smoothing Mask 4}$$

شکل ۵ اثرات هموار کردن ناشی از ماسک (SM3) بر روی شـکل اولیـه (۴) را نـشان می‌دهد.

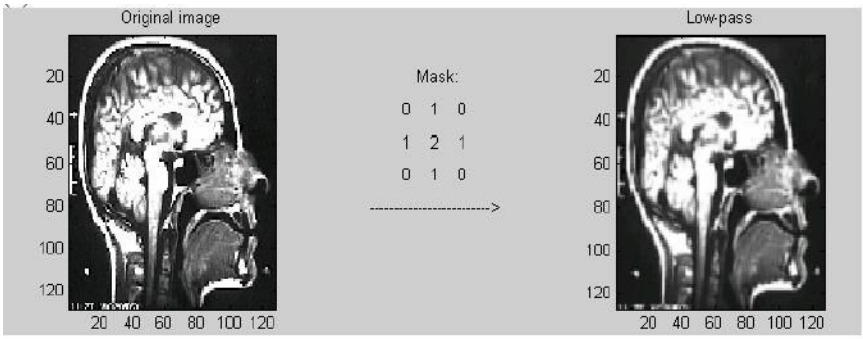


Figure 4 **Figure 5**

میانگین محلی انتخابی:

همانگونه که قبلاً نیز اشاره شد، میانگین محلی ممکن است نویز تصویر را کاهش دهـد، ولی همزمان مقادیر فرکانس بالای تصویر را نیز کاهش می‌دهـد کـه باعـث مـات شـده اطراف و لبه‌ها و جزئیات تصویر می‌شود. برای جلوگیری از این اتفاقـات محلـی شـرطی

ارائه می‌شود. ایده اصلی این میانگین شرطی یا انتخابی بر این اساس است که اگر بعضی شرایط برقرار باشد نقاط سمت چپ آن تصویر تغییر نخواهد کرد. این روش با یک مثال که در ادامه می‌آید توضیح داده می‌شود.

کاهش نویز بدون مات کردن لبه‌ها و محدوده‌های تصویر:

برای این منظور، وقتی چنین خصوصیاتی آشکار نشود از بعضی انواع مختلف تشخیص لبه استفاده می‌شود و میانگین محلی انجام می‌گیرد. اجازه دهید که میانگین محلی بوسیله ماسک SM1 و معادله ۱۷ انجام بگیرد. ابتدا، بایستی شرایط تشخیص لبه را بر روی هر نقطه x از ماتریس تصویر (شکل ۳) مشخص کنیم.

$$\text{if} \quad x' = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} Oi \quad \text{and} \quad |x - x'| \geq T \ \text{then an edge is present} \qquad (20)$$

پس یک لبه موجود است.

که T آستانه است و میانگین اندازه تغییر چگالی حول لبه‌های تصویر را نشان می‌دهد. بنابراین الگوریتم میانگین محلی انتخابی عبارت است از:

$$(21): \quad y = \frac{1}{9}\left(\sum_{i=1}^{8} Oi + x\right)$$

$$\text{και} \quad y = \begin{cases} y & \text{if} \quad |x-x'|<T \\ x & \text{elsewhere} \end{cases} \qquad (22)$$

در این روش، از حذف تصویر و یا مات شدن تصویر در نزدیکی محدوده‌های تصویر جلوگیری می‌شود و فرض می‌شود که دامنه نویز کمتر از T (که میانگین اندازه لبه تصویر است) می‌باشد.

با اصلاح بیشتر این الگوریتم می‌توان به میانگین محلی جهتی دست یافت که شامل نقاطی از تصویر می‌شود که در طول لبه‌ها جای دارند. در این روش از میانگین گیری در طول لبه‌ها جلوگیری می‌شود. با توجه به این موضوع الگوریتم به شکل زیر اصلاح می‌شود:

a) فرض کنیم ماسک کردن به شکل زیر باشد

$$SM_1 = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{9} m_i}\begin{vmatrix} m_7 & m_8 & m_1 \\ m_6 & m_9 & m_2 \\ m_5 & m_4 & m_3 \end{vmatrix} \qquad (23)$$

b) $$b/\begin{cases} m_i = m_1 & \text{if} \quad |x - O_i| < T \\ m_i = m_0 & \text{if} \quad |x - O_i| \geq T \end{cases}$$

c) انجام میانگین گیری محلی با ماسک اصلاح شده SM1 . برای مثال اگر نقاط O_8 و O_1 و O_2 ماسک SM1 به شکل زیر بطور محلی اصلاح می‌یابد:

$$SM_{variable} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

و در معادله ۱۷ به شکل h(m,1) بکار گرفته می‌شود. این الگوریتم اصلاح شده نویز تصویر را از بین می‌برد در حالی که نقاط مرزی و لبه‌های تصویر را نوک تیز نگه می‌دارد ولی در عین حال باعث بالا رفتن محاسبات ما می‌شود.

فیلترمیانی:

ایده این تکنیک هموار کردن تصویر بر این اساس است که مقدار x تصویر را با میانگین نقاط اطراف آن نقطه که شامل خود مقدار x می‌شود جایگزین کنیم. بنابراین برای یک همسایه ۳×۳ مقدار x با میانگین ۵ مقدار بزرگتر جایگزین می‌شود.

این موضوع به این اشاره دارد که مقدار هر ماتریس تصویر نیاز به یک الگوریتم مرتب سازی دارد که محاسبات الگوریتم ما را بالا می‌برد. هرچند، نیاز به مرتب سازی مقادیر برای هر نقطه ۳×۳ همسایه نیست. هنگامی که ما مرتب سازی را برای یک ماتریس ۳×۳ اولی انجام دادیم پس از آن می‌توانیم همسایه‌های موفق را با پاک کردن لبه‌های دنباله‌دار و ترکیب کردن لبه‌های برجسته نگه داریم. شکل ۶ نتایج بکارگیری فیلتر میانی را نشان می‌دهد.

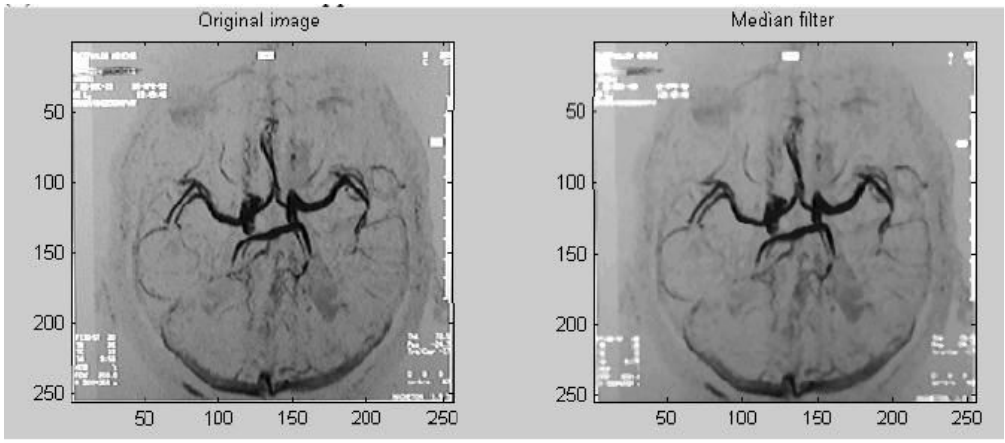


Figure 6

تیز کردن تصویر (نمایان کردن تصویر):

تیز کردن تصویر از تکنیک‌های ارتقاء و بهبود تصویر استفاده می‌کند تا ماتی ناشی از فرآیند شکل‌دهی تصویر روش (PSF) را کاهش دهد.

معادله‌ای که فرآیند تنزل تصویر را شرح می‌دهد چنین است:

$$y(n_1,n_2)= x(n_1,n_2)*h(n_1,n_2)+ d(n_1,n_2) \quad (1)$$

که $x(n_1,n_2)$ تصویر اصلی، $y(n_1,n_2)$ تصویر تنزل یافته و $h(n_1,n_2)$ پاسخ ضربه یا PSF اعمالی سیستم بر روی تصویر است همچنین $d(n_1,n_2)$ نویز تصویر است. نتیجه مات شدن تصویر از دست رفتن جزئیات تصویر و وضوح مرزهاست که ناشی از حذف محتویات فرکانس بالا و میانی تصویر است. واضح است که عمل واضح کردن یا تقویت و تیز کردن عبارت است از، تقویت کردن فرکانس‌های بالای سیستم یا عملیات فیلتر بالاگذر.

در هرحال، عملیات فیلتر بالاگذر، هنگامی که نویز در فرکانس‌های بالای طیف تصویر باشد و همچنین هنگامی که دامنه نویز با سیگنال تصویر قابل مقایسه باشد، بایستی با دقت بالا انجام گیرد. بنابراین، عملیات تیز کردن تصویر ممکن است بعد از کاهش نویز یا در فرکانس‌های با اهمیت زیاد تصویر در فرکانس‌های بالای طیف که نسبت سیگنال به نویز پایین است، انجام گیرد. برای این موضوع، در این فصل فرض می‌شود که فرآیند تنزل دادن تصویر با (۲) توضیح داده شده است:

$$y(n_1,n_2)= x(n_1,n_2)*h(n_1,n_2) \quad (2)$$

که فرض شده است که نویز تصویر حذف شده است و اثر این نویز ناچیز باشد.

فیلتر دیفرانسیل:

حالت ۱بعدی: شکل ۲ فرآیند تنزل سیگنال را نشان می‌دهد. برای حالت یک بعدی و با توجه به معادله ۲ داریم:

$$y(n)= x(n)*h(n) \qquad (3)$$

اگر $h_f(n)$ پاسخ ضربه فیلتر بالاگذر باشد، آنگاه خروجی از معادله ۶ بدست می‌آید:

$$y'(n)= y(n)*h_f(n) \qquad (4)$$

با جایگزینی ۳ در ۴:

$$y'(n)= \left[x(n)*h(n)\right]*h_f(n)= x(n)*\left[h(n)*h_f(n)\right] \qquad (5)$$

واضح است که ما تلاش داریم تا فیلتر $h_f(n)$ به صورت زیر طراحی کنیم:

$$h(n)*h_f(n)= \delta(n) \qquad (6)$$

که $\delta(n)$ تابع ولت است. اگر $h(n)$ تابع سیگنال تنزل یافته، از شکل نوع ۷ که نشان داده شد (قسمت ۱ .۲ را ببینید) باشد اثر پائین‌گذر بر روی سیگنال اصلی $x(n)$ داشته باشد، آنگاه اگر $h(n)$ به شکل زیر داده شده باشد:

$$h(n)= \frac{1}{M}\{1,1,1,\ldots,1\}, \text{M terms} \qquad (7)$$

آنگاه از ۶ و ۷ داریم:

$$\delta(n)=\sum_{k=0}^{M-1} h(n-k)h_f(k) \qquad (8)$$

if M=2 then

$$\delta(n)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1} h(n-k)h_f(k)=\frac{1}{2}\left[h(n-0)h_f(0)+h(n-1)h_f(1)\right] \qquad (9)$$

for n=0 and from (9)

$$\delta(0)=1=\frac{1}{2}\left[h(0)h_f(0)+h(-1)h_f(1)\right]$$

or

$$h_f(0)=2 \qquad (10)$$

که ۰ = (۱-) h چرا که تابع تنزل سیگنال علی فرض شده است. به طور مشابه برای ۱= n از ۹ و ۱۰

hf(1)=-2

بنابراین، فیلتر $h_f(n)$ مورد نیاز که معادله ۶ را تا راضی کند بدست می‌آید:

hf(n)=2{1,-1}

و با بکار بردن معادله (۴)

$$y'(n)=y(n)*h_f(n)=\sum_{k=0}^{1} y(n-k)h_f(k)=2\left(y(n)-y(n-1)\right) \qquad (13)$$

و در حال کلی:

hf(n)=A{1,-1}

که با عملیات بر روی سیگنال $y(n)$ در (۱۵) بدین شکل شرح داده شده است:

$$y'(n)= A\{y(n)- y(n-1)\} \quad (15)$$

پاسخ فرکانسی فیلتر دیفرانسیل

برای بدست آوردن پاسخ فرکانسی از فیلتر دیفرانسیل ۱بعدی از معادله ۱۵ DFT می‌گیریم. برای راحتی بیشتر

$$y(n) = A\{x(n)-x(n-1)\} \quad (16)$$

که $x(n)$ سیگنال تنزل یافته و $y(n)$ سیگنال خروجی فیلتر شده است.

DFT معادله ۱۶ عبارت است از:

$$Fy(k)= A\{Fx(k)- Fx(k)W^{-k}\} = A\{1- W^{-k}\}Fx(k) \quad (17)$$

$$Fy(k)= Fh(k)Fx(k) \quad (18)$$

$$Fh(k)= A\{1- W^{-k}\} \quad (19)$$

که واضح است که رابطه (۱۹) پاسخ فرکانسی فیلتر است. از رابطه ۱۹ و بکارگیری روابط مثلثاتی (۲۰) داریم:

$$\cos(\varphi)= \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) =2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) -1 \qquad (20)$$

که داریم:

$$Fh(k)=2A\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)e^{\frac{j(\pi-\varphi)}{2}} \qquad (21)$$

$$\text{where, } \varphi = \frac{2\pi}{N}k$$

بنابراین از ۲۱

$$|Fh(k)| =2A\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \qquad (22)$$

$$\vartheta(k)=\left(\frac{\pi-\varphi}{2}\right)$$

از شکل ۲۲ و شکل ۷ واضح است که فیلتر دیفرانسیل یک فیلتر بالاگذر است. از معادله‌های ۱۸ و ۲۲ مشخص است که اثر فیلتر دیفرانسیل حذف کامل فرکانس‌های نزدیک صفر است. این موضوع، سبب از بین رفتن اطلاعات فرکانس پایین مانند منطقه بزرگی از بافت هموار شده و همچنین محتویات با اهمیت فرکانس بالا مانند لبه‌ها و مرزها می‌شود. بدین سبب، این تکنیک فیلتر کردن عمدتاً به عنوان تکنیک‌های ارتقاء لبه‌ها می‌باشد.

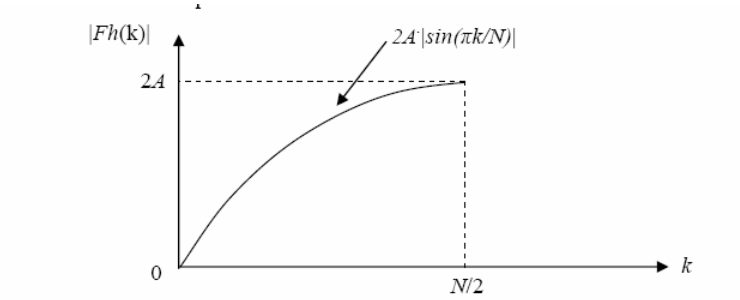


Figure 7

دوبعدی: فیلتر لاپلاسین

برای راحتی بیشتر، یک فیلتر یک بعدی دیفرانسیلی برای توسعه فیلتر به دوبعدی طبق رابطه ۲۳ استفاده شده است:

$$y(n) = [x(n+1)-x(n)] \qquad (23)$$

اجازه دهید تا S نقطه از یک ماتریس کوچک از تصویر با مقادیر Q_1 و Q_2 و Q_3 و Q_4 و نقطه مرکزی x در نظر بگیریم که مقادیر آنها متغیر است. اگر f_i اخـتلاف نقطـه x از نقطه o_i و جهت از x به سمت o_i باشد، طبق معادله ۲۳ داریم:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= O_1 - x\\ \Delta_2 &= O_2 - x\\ \Delta_3 &= O_3 - x\\ \Delta_4 &= O_4 - x\end{aligned} \qquad (24)$$

حال، یک تخمین ساده y عبارت است از جمع کردن تمام از اختلاف‌های معادله ۲۴ به شکل زیر:

$$y = \Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4 = (O_1-x)+ (O_2-x)+ (O_3-x)+((O_4-x)) = \\ = O_1+ O_2+ O_3+ O_4 - 4x \qquad (25)$$

به طور مشابه، با یک درجه بالاتر طبق ۲۵ داریم:

$$y= (O_1-x)-(x-O_3)+(O_4-x)-(x-O_2) = \Delta_h^2 + \Delta_v^2 \qquad (26)$$

که $\Delta_h^2 + \Delta_v^2$ عبارتند از دیفرانسیل‌های عمودی و افقی یا عملیات لاپلاسین در دو جهت عمودی و افقی.

بدین علت است که فیلتر معرفی شده در معادله ۲۵ به عنوان فیلتر لاپلاسین معروف است. برای توضیح بیشتر رابطه ۲۵ می‌تواند به شکل رابطه ۲۷ نوشته شود:

$$y(n_1,n_2)= \sum_{m=-1}^{1}\sum_{l=-1}^{1} x(n_1 - m,n_2 - l)h(m,l) \qquad (27)$$

و:

$$h(m,l)= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad LM_1 \text{ (Laplacian Mask 1)}$$

که به ماسک لاپلاسین ۱ یا LM1 معروف است.

حال، اگر نقاط بیشتر از تصویر وجود داشته باشد می‌توانیم ماسک‌های لاپلاسین بیشتری طراحی کنیم چند نمونه از ماسک‌های لاپلاسین در زیر داده شده است:

$$LM_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad LM_2 \text{ (Laplacian Mask 2)}$$

$$LM_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -12 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad LM_3 \text{ (Laplacian Mask 3)} \qquad (28)$$

$$LM_4 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad LM_4 \text{ (Laplacian Mask 4)}$$

در تصویر نهایی، مقادیر منفی با معادله ۲۹ سروکار دارند:

$$y(n_1, n_2) = \begin{cases} y(n_1, n_2) & for \quad y(n_1, n_2) > 0 \\ 0 & for \quad y(n_1, n_2) \leq 0 \end{cases} \qquad (29)$$

شکل ۸ نتیجه بکارگیری LM1 را نشان می‌دهد. ارتقاء لبه‌ها و از دست رفتن اطلاعات فرکانس پایین واضح است. چنین تکنیک‌هایی عمدتاً برای توضیح شکل و در الگوریتم‌های آنالیز و برای آشکارسازی مرزها بکار می‌روند.

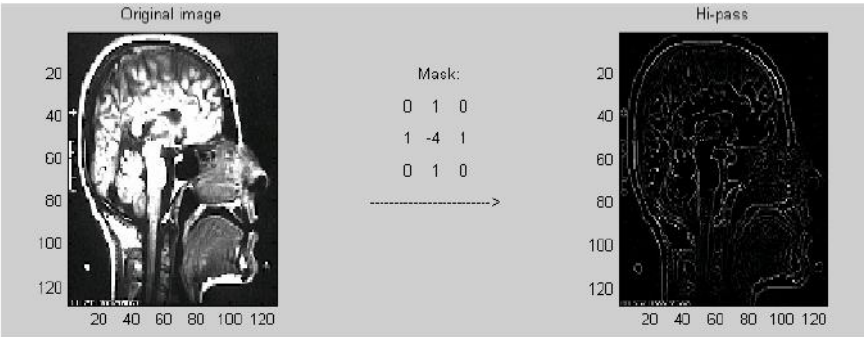


Figure 8

فیلتر کردن با اهمیت فرکانس بالا:

تشخیص و ارتقاء لبه‌ها ممکن است در بسیاری موارد پردازش تصویر ارزشمند باشد ولی در عین حال تیز کردن تصویر و بدست آوردن اطلاعات فرکانس پایین تصویر و همچنین نشان دادن لبه‌ها و جزئیات کل تصویر دارای درجه اهمیت یکسانی هستند. این مهم بوسیله فیلتر کردن با درجه اهمیت بالا انجام می‌شود که با یک مثال بهتر توضیح داده خواهد شد:

در حالت یک بعدی

فرض کنید x(t) سیگنالی شامل تابع شیب (2,4,6,8) و یک پله (لبه : 10 10 .....) به شکل زیر باشد:

Table 1: Sharpening filters example

Signal	0	2	4	6	8	10	10	10	10	10	15	15
Diff.	2	2	2	2	2	0	0	0	0	5	0	…
Lapl	…	0	0	0	0	-2	0	0	0	5	-5	…
High E	0	2	4	6	8	12	10	10	10	5	20	…
Space	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n) \quad (30)$$
$$\Delta^2 x(n)=x(n+1)+x(n-1)-2x(n) \quad (31)$$
$$y(n)=x(n)-\Delta^2 x(n) \quad (32)$$

Diff:فیلتر دیفرانسیل

Lap1:فیلتر لاپلاسین یک بعدی

High E:فیلتر با درجه اهمیت بالا

ابتدا، برای وضوح بیشتر، ما فیلتر دیفرانسیل (معادله ۳۰) را بکار می‌بریم که مشاهده می‌شود که تغییر تیزی در نزدیکی لبه‌ها (در بازه‌های زمانی [4,5] و [8,9] و [14,15]) اتفاق می‌افتد که در نتیجه اطلاعات با ارزشی مانند جزئیات شیب خراب می‌شود. که در نهایت فیلتر دیفرانسیل بر روی سیگنال اثراتی را خواهد گذاشت که در قسمت قبلی به آن پرداختیم.

پس، فیلتر لاپلاسین (معادله ۳۱) را بر روی سیگنال اعمال می‌کنیم. مشاهده می‌کنیم که به غیر از لبه‌ها، بقیه اطلاعات سیگنال حذف می‌شود که نشان دهنده خاصیت آشکارسازی لبه این فیلتر می‌باشد.

در نهایت ما نیاز داریم تا به فیلتری دست پیدا کنیم که هم اطلاعات فرکانس پایین را حذف کند و هم بتواند لبه‌های سیگنال را آشکار کند. که این مهم بوسیله فیلتر ارتقاء بالا محقق خواهد شد.

(رابطه ۳۲) در معادله این فیلتر سیگنال اصلی از لاپلاسین کم می‌شود. در این مثال نشان داده شده که اطلاعات فرکانس پایین سیگنال حذف شده است (بازه‌های زمانی [5,9] و [10,14])، جزئیات سیگنال حذف شده است (بصورت شیب در بازه‌های زمانی [0,4] داده شده) و همینطور نیز لبه‌ها آشکار شده‌اند (بازه‌های زمانی [4,5] و [9,10] و [14,15]).

فیلتر اهمیت بالا دوبعدی

با توجه به معادله‌های ۲۵ و ۳۲ این فیلتر چنین بدست می‌آید:

$$y= x-(O_1+ O_2+ O_3+ O_4 - 4x)= 5x-(O_1+ O_2+ O_3+ O_4) \quad (33)$$

که بصورت فرمول ۳۴ نمایش داده می شود :

$$y(n_1,n_2)= \sum_{m=-1}^{1}\sum_{l=-1}^{1} x(n_1 - m,n_2 - l)h(m,l)$$

where,

$$h(m,l)= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad HEM_1 \text{ (High Emphasis Mask 1)}$$

که در آن h(m,l) ، بصورت HEM1 است کـه معـادل و مـشابه LM1 اسـت. بطـور مشابه، ماسک‌های HEM مختلفی مانند ماسک‌های LM که در (۲۸) داده شده است، در (۳۵) شرح داده شده‌اند.

$$HEM_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad HEM_2 \text{ (High Emphasis Mask 2)}$$

$$HEM_3 = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 13 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \quad HEM_3 \text{ (High Emphasis Mask 3)} \quad (35)$$

$$HEM_4 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad HEM_4 \text{ (High Emphasis Mask 4)}$$

بطور مشابه، مقادیر منفی در تصویر نهایی با رابطه ۲۹ سـروکار دارنـد. شـکل ۹ نتیجـه بکارگیری و اعمال HEM1 بر روی تصویر را نشان می‌دهد.

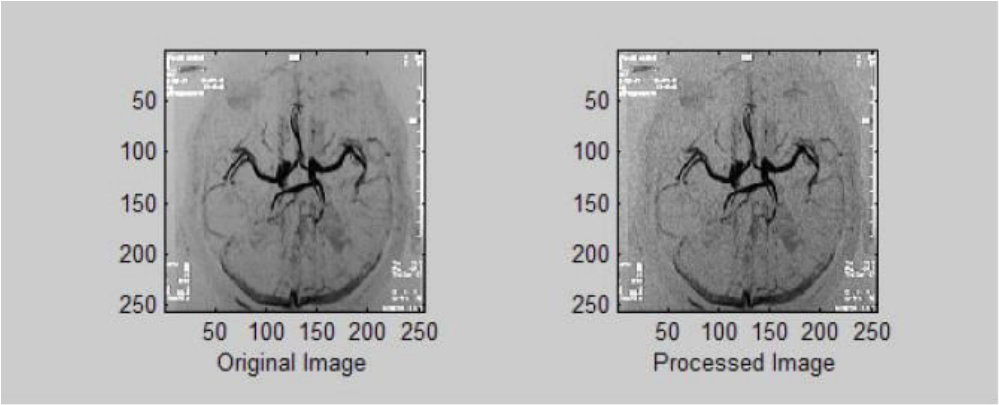


Figure (9)

بهبود و ارتقاء تصویر در حوزه فرکانس:

بهبود تصویر در حوزه فرکانس اعم از پایین گذر، بالاگذر، میان گذر و یا میان نگذر بوسیله معادله ۱ توضیح داده شده است.

$$
\begin{array}{lll}
\text{if} & \text{2-d DFT}[x(n_1,n_2)] = Fx(k_1,k_2) \text{ is the image DFT} & \text{(a)} \\
\text{and} & \text{2-d DFT}[h_f(n_1,n_2)] = Fh_f(k_1,k_2) \text{ the filter DFT} & \text{(b)} \\
\text{then} & y(n_1,n_2) = \text{2-d DFT}[Fx(k_1,k_2)\, Fh_f(k_1,k_2)] & \text{(c)}
\end{array} \qquad (1)
$$

$y(n_1,n_2)$ تصویر بهبود یافته است. معادله (۱c) یک رابطه کانولوشن است که در حوزه فرکانس از ضرب DFTهای تصویر و فیلتر بدست می‌آید. فیلترهای توضیح داده شده در این قسمت توابع حقیقی در حوزه فرکانس هستند که به فیلترهای صفر-فاز- شیفت معروفند. این فیلترها بطور مساوی بر روی قسمت حقیقی و موهومی تابع تبدیل $F_x(k_1,k_2)$ تأثیر دارند و تأثیری بر چرخش فاز تابع تبدیل ندارند. مثالهای مختلفی از

تابع تبدیل‌های این نوع فیلترها در این قسمت آورده شده است که بصورت ۱بعدی می‌باشند و حالت دوبعدی آنها به سادگی با بکارگیری (۲) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\text{if } \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \le N \\ &\text{then } \quad Fh_f(k_1,k_2) = Fh_f\left(\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\right) \\ &\text{else } \quad Fh_f(k_1,k_2) = Fh_f(N) \end{aligned} \qquad (2)$$

که N ، بعد مجذور ماتریس تصویر است.

فیلترهای ایده‌آل:

معادله‌های ۳ تا ۶ فیلترهای ایده‌آل را معرفی می‌کنند که فقط توسط کامپیوتر قابل پیاده سازی هستند.

۱- فیلتر ایده آل پایین گذر

۲- فیلتر ایده آل بالا گذر

۳- فیلتر ایده آل میان نگذر

۴- فیلتر ایده آل میان گذر

1/ Low-pass ideal

$$Fh^{LP}(k)=\begin{cases}1, & \text{for} \quad k\le f_{co}\\ 0, & \text{for} \quad k>f_{co}\end{cases} \qquad (3)$$

2/ High-pass ideal

$$Fh^{HP}(k)=\begin{cases}0, & \text{for} \quad k\le f_{co}\\ 1, & \text{for} \quad k>f_{co}\end{cases} \qquad (4)$$

3/ Band-reject ideal

$$Fh^{HP}(k)=\begin{cases}1, & \text{for} \quad k \le d-\frac{w}{2}\\ 0, & \text{for} \quad d-\frac{w}{2}<k<d+\frac{w}{2}\\ 1, & \text{for} \quad k>d+\frac{w}{2}\end{cases} \qquad (5)$$

4/ Band-pass ideal

$$Fh^{HP}(k)=\begin{cases}0, & \text{for} \quad k \le d-\frac{w}{2}\\ 1, & \text{for} \quad d-\frac{w}{2}<k<d+\frac{w}{2}\\ 0, & \text{for} \quad k>d+\frac{w}{2}\end{cases} \qquad (6)$$

میانگذر ایده‌آل $fh^{BP}() = 1 - Fh$ که، fco فرکانس قطع می‌باشد.

فیلترهای باتروورث:

این فیلترها بوسیله معادله‌های ۷ تا ۱۰ نشان داده شده‌اند:

که n درجه فیلتر است.

1/Low-pass:

$$Fh^{LP}(k)=\frac{1}{1+0.414\left(\frac{k}{f_{co}}\right)^{2n}} \qquad (7)$$

where n is the degree of the filter.

2/High-pass:

$$Fh^{HP}(k)=\frac{1}{1+0.414\left(\frac{f_{co}}{k}\right)^{2n}} \qquad (8)$$

3/Band-reject:

$$Fh^{BR}(k)=\frac{1}{1+0.414\left(\frac{f_{co}}{k-d}\right)^{2n}} \qquad (9)$$

where d is the 'band-reject' bandwidth

4/Band-pass:

$$Fh^{BP}(k)=1-Fh^{BR}(k) \qquad (10)$$

2.3.3 فیلترهای نمایی:

این فیلترها شبیه فیلترهای باترورث هستند و بوسیله معادله‌های ۱۱ تا ۱۴ نـشان داده شده‌اند.

۱) پایین گذر

۲) بالاگذر

۳) میان گذر

۴) میان نگذر

1/Low-pass:

$$Fh^{LP}(k) = e^{-0.347\left(\frac{k}{f_{co}}\right)^n} \quad (11)$$

2/High-pass:

$$Fh^{HP}(k) = e^{-0.347\left(\frac{f_{co}}{k}\right)^n} \quad (12)$$

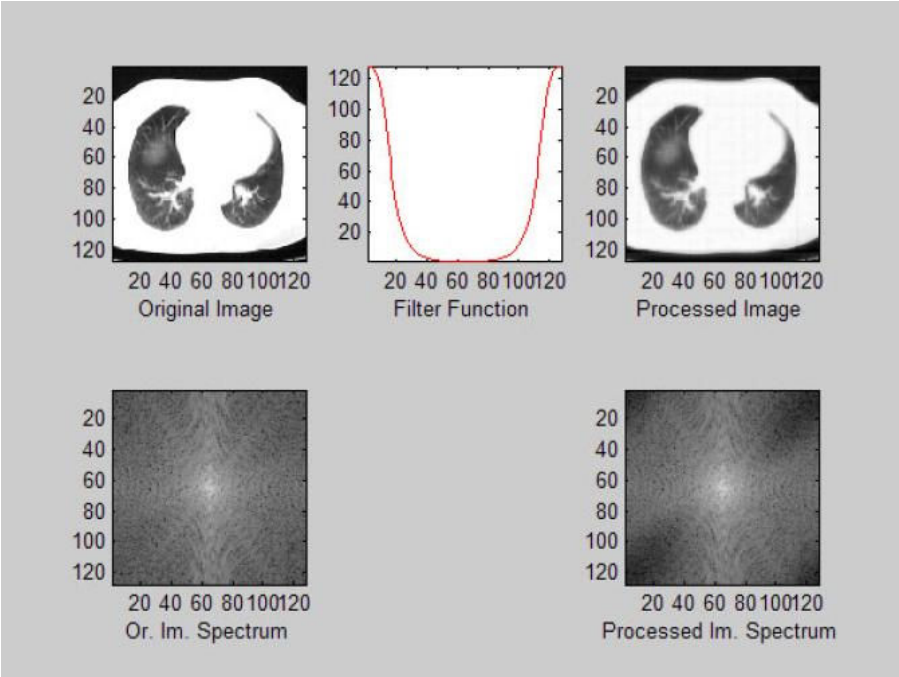
3/Band-Reject:

$$Fh^{BR}(k) = e^{-0.347\left(\frac{f_{co}}{k-d}\right)^n} \quad (13)$$

4/Band-pass:

$$Fh^{BP}(k) = 1 - Fh^{BR}(k) \quad (14)$$

شکل ۱۰ اثر یک فیلتر پایین گذر باترورث و طیف فرکانس پاسخ را نشان می‌دهد.

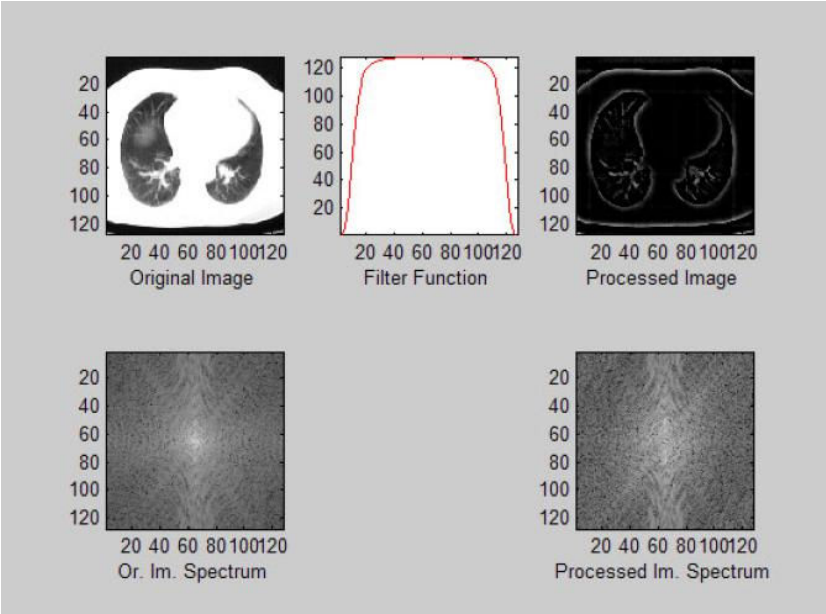


شکل(۱۰): هموارسازی بوسیله باتروورث پایین گذر

نکته: در هنگام بکارگیری فیلترهای بالاگذر بایستی توجه نمود که این نوع فیلترها اغلب اطلاعات فرکانس پایین (همانگونه که در این قسمت توضیح داده شد) را حذف می‌کنند. بنابراین، فیلترها باید به شکل اصلاح شده مانند فیلتر بالاگذر که در معادله (۱۵) شرح داده شده بکار رود.

$$Fh^{HP}(k) = Fh^{HP}(k+d) \qquad (15)$$

که d شیفت فرکانس خاص داده شده در پاسخ فیلتر است. شکل‌های ۱۱ و ۱۲ برای مشاهده اثر این نوع اعمال ببینید.



شکل ۱۱: بهبود لبه

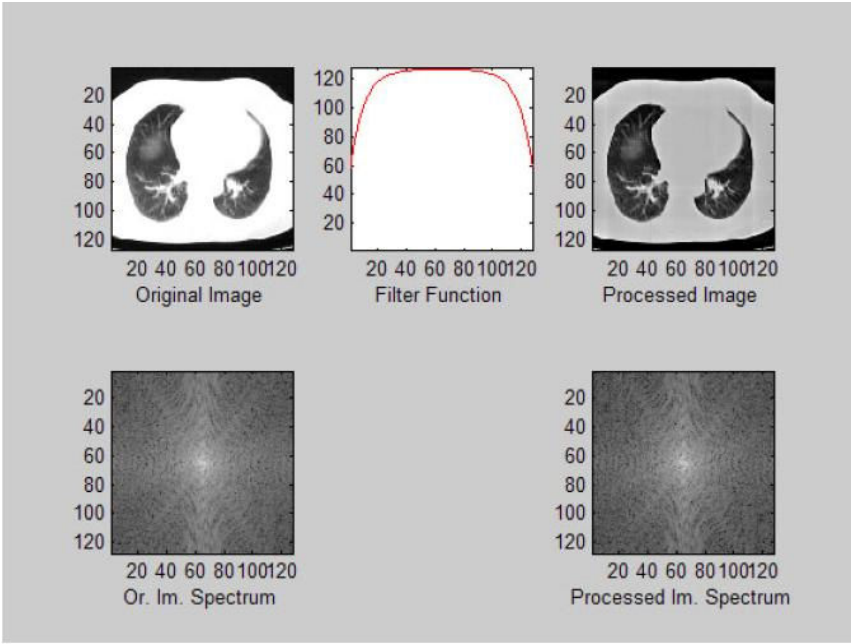


Figure 12: Butterworth High Pass: The effect of frequency shift.

شکل ۱۲: باتروورث بالاگذر، اثر شیفت فرکانسی

بهبود تصویر در حوزه زمان علیه فرکانس:

می‌توان به راحتی به این نکته دست یافت که فیلتر در حوزه‌های فضایی، با بکارگیری یک ماسک ۳×۳ که با تصویر ضرب می‌شود بسیار سریعتر از فیلتر کردن تصویر در حوزه فرکانس است.

این روش را می‌توان به راحتی با مطالعه معادله‌های ۱۶ و ۱۷ تشخیص داد.

$$y(n_1,n_2)=\sum_{l=-1}^{1}\sum_{k=-1}^{1}x(n_1-l,n_2-k)h_f(n_1,n_2) \qquad (16)$$

فیلتر در حوزه فرکانس

$$y(n_1,n_2) = 2d\text{-}IDFT\ \{\ Fx(k_1,k_2)Fh_f(k_1,k_2)\ \} \qquad (17)$$

به هرحال، برای بالا بردن حوزه فیلتر کردن بازه‌ای، نقاط بیشتری از تصویر نیاز است. به بیان دیگر، ابعاد فیلتر، ماسک به مقادیر ۵×۵ ، ۷×۷ ، ۹×۹ ، ..... افزایش یابد. معمولاً، برای ماسک‌های بیش از ۱۱×۱۱ نشان داده می‌شود که فیلتر حوزه فرکانس سریعتر است.

در سیستم‌های تصویربرداری پزشکی مانند CT- Scan دوربین‌های گاما، DSA ، بهبود تصویر عمدتاً بوسیله ماسک‌های ۳×۳ انجام می‌شود که توسط کارخانه سازنده نرم‌افزار ارائه می‌شود.

بازسازی تصویر:

بازسازی تصویر تلاش دارد تا تصویر اصلی را بوسیله محاسبات ریاضی از فرآیند تنـزل و با بکارگیری فرآیند معکوس بر روی تصویر تنـزل یافتـه، بدسـت آورد. تمـام فیلترهـای شرح داده شده در این فصل برای حالت یک بعدی در نظر گرفته شده است و می‌توانند برای حالت دوبعدی توسعه یابند.

فیلتر معکوس:

حالت یک بعدی: فرض کنید که سیگنال فرآیند تنزل یافته با رابطه ۱ نشان داده شـده باشد:

$$y(n) = x(n)*h(n)+d(n) \quad (1)$$

که $x(n)$ سیگنال اصلی، $h(n)$ پاسخ ضربه سیـستم. $d(n)$: نـویز کـه در اینجـا جمـع شونده در نظر گرفته شده است:

با DFT گرفتن از (۱) داریم:

$$Fy(k) = Fx(k)Fh(k)+Fd(k) \quad (2)$$

حال $F_h(k)$ (وبطور مشابه $h(n)$) می‌تواند با بکارگیری تابع ولت، برانگیخته شود و خروجی اندازه‌گیری شود. (در حالتی که سیستم تصویر یک منبع نقطه‌ای باشد) مخالف صفر بودن رابطه ۳ واضح است:

$$Fx(k)=\frac{Fy(k)}{Fh(k)}-\frac{Fd(k)}{Fh(k)} \qquad (3)$$

در مواردی که نویز به حد کافی کم باشد رابطه $\frac{F_d(k)}{F_h(k)}$ می‌تواند ناچیز فرض شود بنابراین:

$$Fx(k)\cong\frac{Fy(k)}{Fh(k)}=Fy(k)\left[\frac{1}{Fh(k)}\right] \qquad (4)$$

و اگر $F_w(k)=[\frac{1}{F_h(k)}]$، پس یک تخمین از سیگنال بازسازی شده بوسیله ۵ بدست می‌آید:

$$x(n)\approx IDFT\{Fy(k)Fw(k)\} \qquad (5)$$

در هرحال، مقدار نویز اغلب اوقات قابل صرفنظر کردن نیست، بطور خاص در فرکانس‌های بالا که $F_h(k)$ پایین و $F_d(k)$ نسبتاً زیاد است در (هنگامی که نویز در فرکانس‌های بالا اقامت دارد) رابطه خلاصه شده زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$Fx(k)=\begin{cases}\frac{Fy(k)}{Fh(k)} & \text{if} \quad Fh(k)>C\\ \frac{Fy(k)}{C} & \text{if} \quad Fh(k)\le C\end{cases} \qquad (6)$$

و $x(n) \propto IDFT\{F_x(k)\}$ که c یک مقدار ثابت است.

در حالت دوبعدی:

با بازسازی رابطه ۶ رابطه ۷ بدست می‌آید:

$$Fx(k_1,k_2)=\begin{cases}\dfrac{Fy(k_1,k_2)}{Fh(k_1,k_2)} & \text{if} \quad Fh(k_1,k_2)> C \\ \dfrac{Fy(k_1,k_2)}{C} & \text{if} \quad Fh(k_1,k_2)\le C\end{cases} \qquad (7)$$

معمولاً، $h(n_1,n_2)$ یک شکل گوسی به فرم داده شده در رابطه (۸) می‌دهد. (مثلاً PSF دوربین گاما یک شکل گوسی دارد.)

$$h(n_1,n_2)= C_1 e^{-\frac{\sqrt{n_1^2+n_2^2}}{C_2}} \qquad (8)$$

که c_1 و c_2 ثابت‌اند.

فیلتر Wiener:

فیلتر wiener بر مشکلات نویز فیلتر معکوس غلبه می‌کند.

فیلتر wiener یک بعدی:

اگر $F_x(k)$ یک پاسخ تقریبی معادله (۲) باشد، ما به دنبال یک تابع فیلتر $F_w(k)$ هستیم، که:

$$Fx'(k)=\frac{Fw(k)Fy(k)}{Fh(k)} \qquad (1)$$

$F_y(k)$ ، DFT تابع $y(n)$ است، تصویر تجزیه شده.

$F_h(k)$: پاسخ فرکانسی فضایی روش تجزیه است. بنابراین:

$$e^2=\sum_{k=0}^{N-1}\left|Fx'(k)-Fx(k)\right|^2 : \text{minimum} \qquad (2)$$

که $F_x(k)$ ، DFT سیگنال تجزیه نشده اصلی است.

از (۱) و (۲) و روش تجزیه تصویر داریم:

$$e^2=\sum_{k=0}^{N-1}\left|\frac{Fw(k)\left(Fx(k)Fh(k)+Fd(k)\right)}{Fh(k)}-Fx(k)\right|^2=....$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{Fh(k)}\left\{\left|Fx(k)Fh(k)\right|^2\left|Fw(k)-1\right|^2+\left|Fw(k)Fd(k)\right|^2\right\}$$

(3)

از اینجا متوجه می‌شویم که، $O'|F_d(k)F_x(k)|=0$، نویز و سیگنال همبستگی ندارند. با دیفرانسیل از (۳) و با توجه به $|F_w(k)|$ داریم:

$$\frac{\partial e^2}{\partial|Fw(k)|}=0 \quad \text{or}$$

$$Fw(k)=\frac{\left|Fx(k)Fh(k)\right|^2}{\left|Fx(k)Fh(k)\right|^2+\left|Fd(k)\right|^2}$$

(4)

اکنـون، اگـر فـرض کنـیم $F_w(k)$ صـفر فـاز اسـت (دارای فـاز صـفر اسـت)، پـس $|F_w(k)| = F_w(k)$ ، یعنی مقادیر حقیقی در حوزه فرکانسی (و مثبت، از (۴) و (۱)).

با مخالف صفر قرار دادن آن داریم:

$$Fx'(k) = \frac{|Fx(k)Fh(k)|^2}{|Fx(k)Fh(k)|^2 + |Fd(k)|^2} \frac{Fy(k)}{Fh(k)} \quad (5)$$

and safeguarding against zeroes in

$$Fx'(k) = \left[\frac{|Fh(k)|^2}{|Fh(k)|^2 + \frac{|Fd(k)|^2}{|Fx(k)|^2}} \right] \frac{Fy(k)}{Fh(k)} \quad (6)$$

از معادله (۶) معلـوم اسـت کـه خـارج قـسمت $\frac{|F_d(k)|^2}{|F_x(k)|^2}$ بیـانگر نـسبت دامنـه قـدرت (power spectra) نویز و سیگنال اولیه است. یا نسبت نویز به چگالی دامنـه قـدرت سیگنال است. در فرکانس‌های پایین، نسبت نویز به سیگنال تقریباً صفر است. بنـابراین معادله (۶)، فیلتر معکوس را کاهش مـی‌دهـد. در فرکـانس‌هـای بـالا نـسبت نـویز بـه سیگنال، به مقادیر قابل اندازه‌گیری‌ای می‌رسد. بنـابراین، $\frac{1}{F_h(k)}$ کـوچکتر مـی‌شـود، و بهینه‌ترین بازگرداندن را با وجود نویز می‌دهد. در مثالهایی که نویزهای استاتیکی معلوم نیستند. خارج قسمت $\frac{|F_d(k)|^2}{|F_x(k)|^2}$ با مقدار ثابت داده شده در معادلـه (۷) در نظـر گرفتـه می‌شود.

$$Fx'(k) = \left[\frac{|Fh(k)|^2}{|Fh(k)|^2 + C} \right] \frac{Fy(k)}{Fh(k)} \quad (7)$$

فیلتر wiener دوبعدی:

متناسب با معادله (۷)، فیلتر wiener دوبعدی بصورت معادله (۸) بدست می‌آید:

$$Fx'(k_1,k_2)=\left[\frac{|Fh(k_1,k_2)|^2}{|Fh(k_1,k_2)|^2+C}\right]\frac{Fy(k_1,k_2)}{Fh(k_1,k_2)} \qquad (8)$$

and

$x'(n_1,n_2) = 2\text{-d IDFT } \{Fx'(k_1,k_2)\}$

معادله دامنه قدرت یا فیلتر همریخت:

در این روش بازگرداند، یک پاسخ تقریبی $F_{x'}(k)$ برای معادله تجزیه تصویر جستجو می‌شود که دامنه قدرت $\sum|F_{x'}(k)|^2$ برابر با سیگنال تجزیه نشدهٔ اصلی $|F_x(k)|^2$ است.

فیلتر همریخت (homomorphic) یک بعدی:

بعنوان مثال در نمونه‌های فیلتر wiener ما به دنبال یک تابع فیلتر $F_w(k)$ مثل زیر هستیم:

$$Fx'(k)=\frac{Fw(k)Fy(k)}{Fh(k)} \qquad (1)$$

که $F_y(k)$: DFT سیگنال تجزیه شده است.

$F_h(k)$: پاسخ فرکانسی (تابع تبدیل) روش تجزیه است.

با فرض اینکه:

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left|Fx'(k)\right|^2 = \sum_{k=0}^{N-1}\left|Fx(k)\right|^2 \qquad (2)$$

از معادله (۱) و معادله تجزیه تصویر و با توجه به اینکه نویز و سیگنال همبستگی ندارند، سمت چپ معادله (۲) بصورت معادله (۳) که در زیر داده شده است، بدست می‌آید:

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left|Fx'(k)\right|^2 = \sum_{k=0}^{N-1}\left|\frac{Fw(k)Fy(k)}{Fh(k)}\right|^2 =...= \\ = \sum_{k=0}^{N-1}\left|Fw(k)\right|^2 \frac{\left|Fx(k)\right|^2\left|Fh(k)\right|^2 + \left|Fd(k)\right|^2}{\left|Fh(k)\right|^2} \qquad (3)$$

بنابراین بر اساس معادله (۲)، داریم:

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left|Fx(k)\right|^2 = \sum_{k=0}^{N-1}\left|Fw(k)\right|^2 \frac{\left|Fx(k)\right|^2\left|Fh(k)\right|^2 + \left|Fd(k)\right|^2}{\left|Fh(k)\right|^2} \qquad (4)$$

که با حل عبارت $|F_w(k)|$ معادله (۵) بدست می‌آید:

$$Fw(k)=\sqrt{\frac{\left|Fx(k)Fh(k)\right|^2}{\left|Fx(k)Fh(k)\right|^2 + \left|Fd(k)\right|^2}} \qquad (5)$$

با بررسی $F_w(k)$ که دارای فاز صفر است، معادله (۶) بدست می‌آید:

$$Fx'(k)=\sqrt{\left[\frac{|Fx(k)Fh(k)|^2}{|Fx(k)Fh(k)|^2+|Fd(k)|^2}\right]}\frac{Fy(k)}{Fh(k)} \qquad (6)$$

و با مخالف صفر قرار دادن در $|F_x(k)|$ داریم:

$$Fx'(k)=\sqrt{\left[\frac{|Fh(k)|^2}{|Fh(k)|^2+\frac{|Fd(k)|^2}{|Fx(k)|^2}}\right]}\frac{Fy(k)}{Fh(k)} \qquad (7)$$

همچنانکه در نمونه فیلتر wiener که نویزهای استاتیک مشخص نیستند خارج قسمت $\frac{|F_d(k)|^2}{|F_x(k)|^2}$ با مقدار ثابت داده شده در معادله (۸) در نظر گرفته می‌شود:

$$Fx'(k)=\sqrt{\left[\frac{|Fh(k)|^2}{|Fh(k)|^2+C}\right]}\frac{Fy(k)}{Fh(k)} \qquad (8)$$

از معادله (۷) معلوم می‌شود که:

۱) عبارت داخل [] مشابه فیلتر wiener ای است که فقط تا قدرت $\frac{1}{2}$ بالا برده شده بود.

۲) در فرکانس‌های پایین، که نسبت نویز به سیگنال کوچک است، فیلتر معادل، فیلتر معکوس است.

۳) در فرکانس‌های بالا، که سهم نویز قابل توجه است، عبارت داخل براکت کمتر از یک می‌شود و چون تا قدرت 0.5 بالا رفته است، مقدارش بزرگتر از مقدار مربوطه فیلتر معکوس است. بنابراین، عبارت $\frac{1}{F_h(k)}$ وقتی که در ریشه دوم عبارت داخل براکت

ضرب می‌شود به مقادیر کوچکتری نسبت به مقادیر فیلتر wiener می‌رسد. (از مقادیر فیلتر wiener کوچکتر می‌شود). بدین معنی که، موقوف سازی سیگنال (نـرم کـردن) فرکانس بالا کم است.

۴) در بخش میانی محدوده فرکانسی، مقدار فیلتر بین مقادیر فیلتـر wiener و فیلتـر معکوس قرار می‌گیرد.

۲- فیلتر همریخت دوبعدی:

متناسب با معادله (۸) فیلتر همریخت دوبعدی به صورت معادله (۹) قابل توصیف است:

$$Fx'(k_1,k_2)=\sqrt{\frac{|Fh(k_1,k_2)|^2}{|Fh(k_1,k_2)|^2+C}}\,\frac{Fy(k_1,k_2)}{Fh(k_1,k_2)} \qquad (9)$$

$$\text{and} \quad x'(n_1,n_2) = \text{2-d IDFT } \{Fx'(k_1,k_2)\}$$

شکل(۱) کاربرد هر سه فیلتر بازگردانی را نشان می‌دهد:

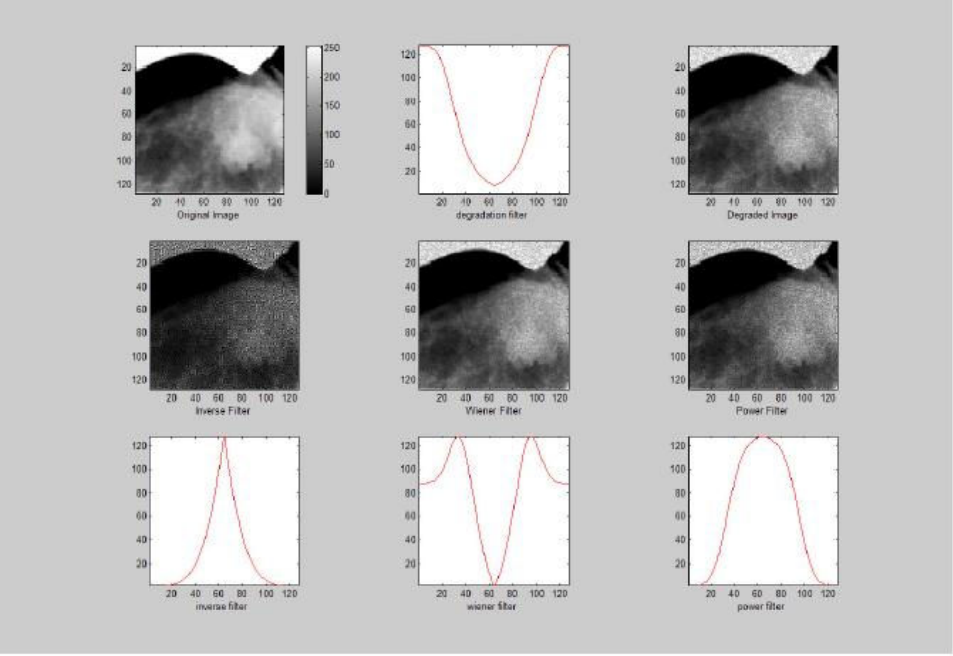


Figure 1: Restoration Filters

فیلترهای wiener تعمیم یافته:

ممکن است سه فیلتر بازگردانی توصیف شده در پاراگراف‌های قبل، بعنوان انواع خاصی از فیلتر wiener تعمیم یافته توصیف شده در معادله (۱) بررسی شوند:

$$Fx'(k_1,k_2)=\left[\frac{|Fh(k_1,k_2)|^2}{|Fh(k_1,k_2)|^2+\beta C}\right]^{1-\alpha}\frac{Fy(k_1,k_2)}{Fh(k_1,k_2)} \qquad (1)$$

انواع فیلترهای wiener:

۱) برای $\alpha=1$ و $\beta=0$: فیلتر معکوس

۲) برای $\alpha=0$ و $\beta=1$: فیلتر wiener

۳) برای $\alpha=0.5$ و $\beta=1$: فیلتر محدوده قدرت

۴) ترکیب‌های مختلف $\alpha=1$ و $\beta=0$ ، ممکن می‌باشد.

الگوریتم های بازسازی تصویر توموگرافی:

الگوریتم بازسازی فوریه:

فرض کنیم که شی داخل تصویر (1a) برشی نازک و مقطعی از بدن انسان است، و همچنین فرض کنیم که یک پرتو x-ray در حال حرکت در روی محور n1 ، تکه‌های تصویر را اسکن کند. در آشکارساز نهایی، خواهیم داشت:

$$\left[M_2\right]_{nk}=\left[M_1\exp\left(-\sum_{n_2=-\frac{N}{2}}^{n_2=+\frac{N}{2}}x(n_1,n_2)\right)\right]_{nk} \qquad (1)$$

که، n_k: موقعیت لحظه‌ای دوربین x-ray

M_1: تعداد فوتون‌های در حال ورود به تکه تصویر در میان ستون ماتریسی n_k.

M_2: تعداد فوتون‌هایی که در حال ترک کردن تکه تصویر در آشکارساز نهایی است.

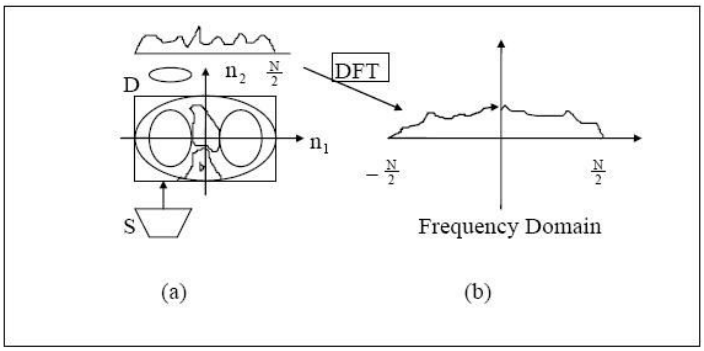


Figure 1

تعداد فوتون‌های آشکار شده به کمک رابطه زیر بدست می‌آیند:

$$\left[M_2\right]_{nk} = \left[M_1 \exp\left(- \sum_{n_2=-\frac{N}{2}}^{n_2=+\frac{N}{2}} x(n_1,n_2) \right) \right]_{nk} \qquad (1)$$

با بازنویسی رابطه (۱)، رابطه (۲) بدست می‌آید:

$$\left[\sum_{n_2=-\frac{N}{2}}^{n_2=+\frac{N}{2}} x(n_1,n_2) \right]_{nk} = \ln\left[\frac{M_1}{M_2}\right]_{nk} = p(nk) \qquad (2)$$

که $p(n_k)$ تصویر تشکیل شده بوسیله منبع x-ray در موقعیت n_k است. همچنین، DFT تکه تصویر $x(n_1,n_2)$ به کمک معادله زیر بدست می‌آید:

$$Fx(k_1,k_2)=\sum_{n_1=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}\sum_{n_2=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}x(n_1,n_2)W^{-(k_1n_1,k_2n_2)} \qquad (3)$$

با مرتب کردن معادله (۳) داریم:

$$Fx(k_1,k_2)=\sum_{n_1=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}\left\{\sum_{n_2=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}x(n_1,n_2)W^{-(k_1n_1)}\right\}W^{-(k_2n_2)} \qquad (4)$$

فرض کنیم: $k_2=0$ ، بنابراین از رابطه (۴) داریم:

$$Fx(k_1,0)=\sum_{n_1=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}\left\{\sum_{n_2=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}x(n_1,n_2)W^{-(k_1n_1)}\right\}$$

or

$$Fx(k_1,0)=\sum_{n_1=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}\left\{\sum_{n_2=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}x(n_1,n_2)\right\}W^{-(k_1n_1)} \qquad (5)$$

با ترکیب معادلات (۲) و (۵) داریم:

$$Fx(k_1,0)=\sum_{n_1=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}\{p(n_1)\}W^{-(k_1n_1)} \qquad (6)$$

$$Fx(k_1,0) = Fp(k_1,0) \qquad (7)$$

معادله (۷) نشان می‌دهد که DFT یک بعدی تکه تصویر، تصویر تشکیل شده توسط سیستم آشکارساز منبع x-ray ، در طول محور n_1 حرکت می‌کند. همچنانکه در شکل (1a) نشان داده شده است. DFT یک بعدی با ردیف k_1 مربوط به DFT دوبعدی تکه تصویر که در شکل (1b) نشان داده شده است. برابر است با روابط ۶ و ۷ می‌توانند برای هر تکه تصویر که دارای یک زاویه هستند، تعمیم داده شوند. با محور n1 ، بنابراین:

$$Fx(r,\varphi)= \sum_{t=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} p(t,\varphi)W^{-rt} \qquad (8a)$$

or

$$Fx(r,\varphi)= Fp(r,\varphi) \qquad (8b)$$

از آنجایی که که ما از مختصات قطبی استفاده کرده‌ایم و r محوری در حوزهٔ فرکانسی با زاویهٔ Φ با محور k_1 است، در شکل (۲) نشان داده شده، $FP(r,\Phi)$ ، DFT یک بعدی تصویر $p(t,\Phi)$ در طول t با زاویه Φ با محور افقی n_1 است. روابط (۸) به قاعده تکه فوریه (Fourier slice Theorem) یا قاعده تکه تصویر (projection slice Theorem) ، اشاره دارند. چون این روابط، DFT یک بعدی یک تصویر از یک تکه تصویر با DFT دوبعدی تکه خودش را نشان می‌دهد. به دنبال تغییر زاویهٔ Φ بین صفر تا ۱۸۰ درجه، می‌توان دامنه فرکانسی فضایی دوبعدی تکه تصویر را تشکیل داد. و سپس با گرفتن IDFT دو بعدی می‌توان$x(n_1 , n_2)$ تکه تصویر اصلی را تشکیل داد.

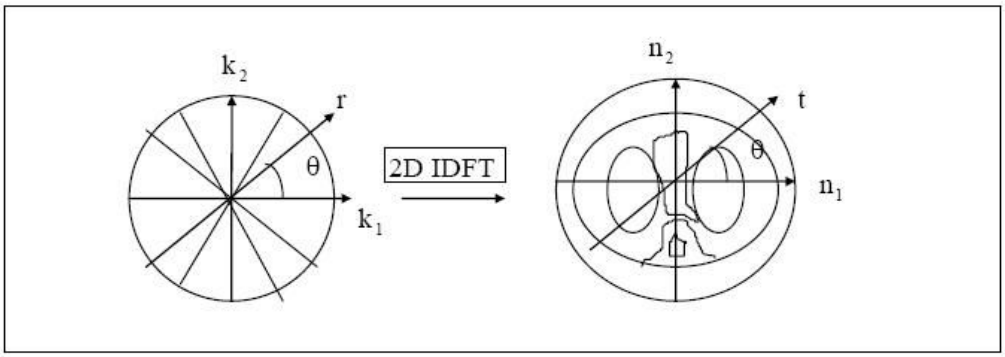


Figure 2.

عمل بازسازی‌ای که توضیح داده شد، دارای یک اشکال اساسی است، و آن اینکه تصویر بازسازی شده را به شدت خراب می‌کند.

همانطور که در شکل (۲) مشاهده می‌شود دامنه فرکانسی فضایی طوری تشکیل می‌شود که در فرکانس‌های پایین نسبت به فرکانس‌های بالا دارای مقادیر بیشتری است. اکنون، برای محاسبه دامنه فرکانسی دکارتی $F_x(k_1,k_2)$ از $F_x(r,\Phi)$ قطبی، عمل درون یابی انواع زیادی از خطاهای شباهت در فرکانس‌های بالا را نسبت به فرکانس‌های پایین، نشان می‌دهد. چون نقاط قطبی جدا هستند. این یک تأثیر موقوف سازی فرکانس بالا (نرم کردن smoothing) را نشان می‌دهد، که مشابه تقسیم کردن $F_x(k_1,k_2)$ بر $\sqrt{k_1^2+k_2^2}$ ، فاصله تا مبدأ است. برای جبران این، باید $F_x(k_1,k_2)$ در آن فاکتور ضرب شود، یعنی:

$$Fx(k_1,k_2)\sqrt{k_1^2+k_2^2} = T\left[Fx(r,\varphi)\right] \qquad (9)$$

که $T[F_x(r,\Phi)]$ عمل تبدیل از مختصات قطبی به مختصات دکارتی را بوسیله درون یابی خطی، مشخص می‌کند.

بنابراین، جواب بدیهی برای مسئله بازسازی تصویر توموگرافی در رابطه (۱۰) داده شده است.

$$x(n_1,n_2)=\frac{1}{NN}\sum_{k_2=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}\sum_{k_1=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}Fx(k_1,k_2)\sqrt{k_1^2+k_2^2}\,W^{(k_1n_1,k_2n_2)} \qquad (10)$$

or

$$x(n_1,n_2)=2-d_IDFT\left\{Fx(k_1,k_2)\sqrt{k_1^2+k_2^2}\right\}$$

این پاسخ، الگوریتم بازسازی فوریه نامیده شده است. هرچند مثالهای متعددی از پیاده سازی موفقیت آمیز این الگوریتم وجود داشته است، اما به دلایل زیر، این الگوریتم در سیستم‌های پزشکی پیاده سازی نشده است:

۱) تبدیل مختصات قطبی به مختصات دکارتی در حوزه فرکانس انجام شده است، که بنابراین زمان از بین می‌رود، حافظه کامپیوتر اشغال می‌شود و نادرست است.

۲) در عمل DFT دوبعدی در رابطه (۱۰) ، حتی هنگامیکه الگوریتم‌های FFT سریع به کار گرفته می‌شوند، زمان بد است، حافظه کامپیوتر اشغال می‌شود. (آرایه‌های مختلط) و بخاطر خطای wrap-around وابسته به طبیعت پریودیک DFT در کانولوشی، نادرست است. برای جبران کردن آنها از zero-padding و windowing استفاده می‌شود که نیازمند حافظه کامپیوتر زیاد و زمان محاسبه طولانی است.

الگوریتم کانولوشن و فیلتر برگشتی:

این رایج‌ترین الگوریتم بازسازی است که برای تصاویر با کیفیت بالا (مثل CT و SPECT) استفاده می‌شود و با دقت و سرعت بازسازی آن، توصیف می‌شود و با کمی

تغییر در معادله (۱۰) بدست می‌آید. بنابراین از درون یابی خطی حوزه فرکانس و استفاده از DFT دوبعدی اجتناب می‌شود.

با بازنویسی سمت راست معادله (۱۰) به فرم قطبی داریم:

$$x(n_1,n_2)=\frac{1}{NN}\sum_{\varphi=-0}^{\pi}\sum_{r=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}Fx(r,\varphi)|r|W^{rk} \qquad (11)$$

جاییکه :

$$t=n1\cos\phi + n2\sin\phi$$

که همانطور که در شکل (۲) دیده می‌شود:

اکنون از روابط (۸) داریم:

$$Fx(r,\phi)=\sum_{t=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}p(t,\phi)W^{-rt}=Fp(r,\theta)\ \text{(DFT)} \qquad (12\alpha)$$

also,

$$p(t,\varphi)=\frac{1}{N}\sum_{r=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}Fp(r,\phi)W^{rt}\ \text{(IDFT)} \qquad (12\beta)$$

بنابراین، با استفاده از روابط ۱۱ و ۱۲ داریم:

$$x(n_1,n_2)=\frac{1}{N}\sum_{\varphi=-0}^{\pi}\frac{1}{N}\sum_{r=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}Fp(r,\circ)|r|W^{rk}$$

or

$$x(n_1,n_2)=\frac{1}{N}\sum_{\varphi=-0}^{\pi}p'(t,\phi) \qquad (13\alpha)$$

where, 13.

$$p'(t,\varphi)=\frac{1}{N}\sum_{r=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}Fp(r,\varphi)|r|W^{rk} \qquad (13\beta)$$

فرمول‌های 13(a) و 13(b) نشان می‌دهند که از هر تصویر $P(t,\Phi)$ ابتدا یک تصویر فیلتر شده $P'(t,\Phi)$ بوسیله معادله 13(b) محاسبه می‌کنیم. سپس از معادله 13(a) برای بدست آوردن تکه تصویر $x(n_1,n_2)$ استفاده می‌کنیم.

توجه:

۱) رابطه 13(b) عمل فیلترینگ در حوزه فرکانس با تابع فیلتر $|r|$ را توصیف می‌کند، که یک تابع ramp (شیب) در حوزه فرکانس است. برای جلوگیری از تغییرات ناگهانی فرکانس در فرکانس‌های بالای نهایی فیلتر، از یک تابع پنجره‌ای (windowing function) در حوزه فرکانس استفاده می‌شود، و همچنین برای جلوگیری از خطای wrap-around ، از zero-padding استفاده شده است. بنابراین معادله 13(b) به فرم زیر اعمال می‌شود:

$$p'(t,\theta)=1-\text{d_DFT}\left(Fpe(r,\varphi)|r|w_f(r)\right) \qquad (14)$$

که $F_{pe}(r,\Phi)$ یک آرایه یک بعدی 2N به فرم $F_p(r,\Phi)$ که با آخرین N مقدار مختلط پر شده با صفر است. و $w_f(r)$ یک آرایه پنجره به طول 2N است.

معادله 13(b)، با استفاده از فرمول کانولوشن زیر در حوزه فضایی نیز قابل اجراست:

$$p'(t,\varphi)=\frac{1}{N}\sum_{t=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}p(t,\varphi)h(t-n)=p(t,\varphi)*h(t) \qquad (15)$$

و

$$h(t) = 1\text{-d IDFT } \{ |r| \text{ wf}(r) \}$$

که $h(t)=1-dIDFT\{|r|wf(r)\}$ فقط برای یکبار محاسبه می‌شود.

معادله ۱۵ و 13(a) می‌توانند بصورت سخت افزاری طراحی شوند و پیاده سازی سریع الگوریتم را فراهم کنند.

۲) معادله 13(a) ممکن است بعنوان عملکردبرگشتی در نظر گرفته شود، که تمام مقادیر اختصاص داده شده به هر پیکسل $x(n_1,n_2)$ بوسیله درون یابی خطی را، با هم جمع می‌کند.

بر این اساس، اگر معادله ۱۴ با معادله 13(a) ترکیب شود، الگوریتم Filter Back Projection نامیده می‌شود، و اگر معادله (۱۵) استفاده شود، Convolution Back Projection نامیده می‌شود.

۳) تابع‌های فیلترینگ پنجره‌ای استفاده شده در ۱۴ و ۱۵ به صورت زیر می‌باشند:

Rectangular: wf(r) = 1 (otherwise Ram-Lak)

Hanning: wf(r) = 0.5(1-cos(2 π r/N))

Hamming: wf(r) = 0.54 - 0.46cos(2 π r/N)

Blackman: wf(r) = 0.42 - 0.5cos(2 π r/N)+0.08cos(4 π r/N)

Shepp-Logan: wf(r) = sin(π r/N) / (π r/N)

Cosine: wf(r) = cos(π r/N)

شکل ۳: بازسازی با استفاده از فیلتر Shepp-Logan.

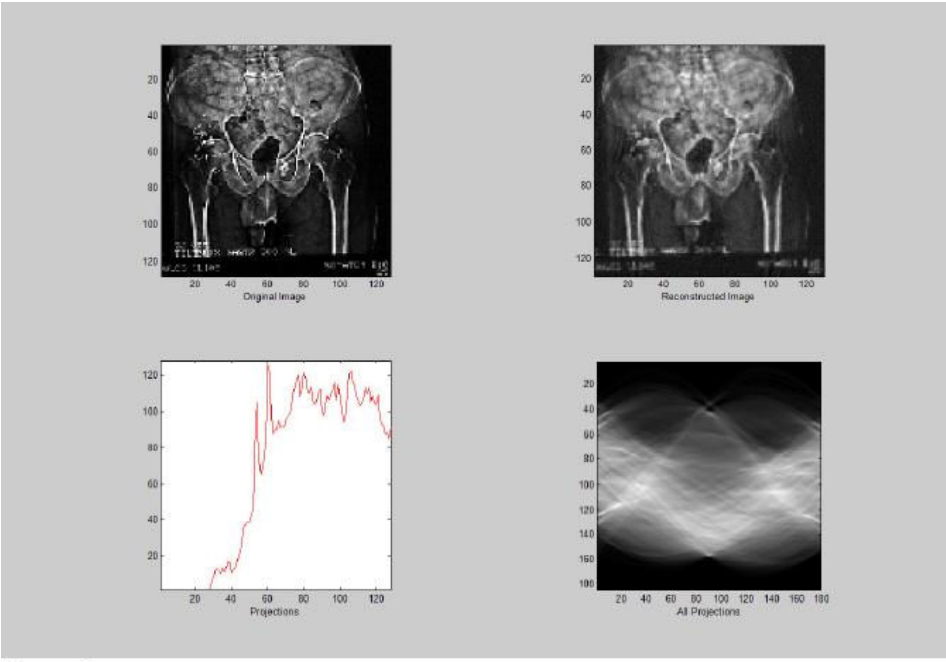


Figure 3

مراجع:

1/RogersD.F."Proceduralelementsforcomputer graphics"McGraw-Hill(1985).

2/GonzalezR.C.,WintzP."Digitalimageprocessing". Addison-Wesley(1977).

3/PrattW.K."Digitalimageprocessing".Wiley(1978).

4/RosenfeldA.andKakA.C."Digitalpictureprocessing" 2ndEdition.Academic

Press(1982).

5/JainA.K."Fundamentalsofdigitalimageprocessing".

PrenticeHall(1989).